# Curriculum Vitae détaillé


## Michel Duprez

## Contact

| | |
|---|---|
| Adresse professionnelle : | Centre de Mathématiques et Informatique (CMI)<br>39, rue F. Joliot Curie<br>13453 Marseille Cedex 13 |
| Adresse personnelle : | 71, rue d'Alger<br>13 005 Marseille |
| Téléphone : | 06 81 23 88 46 |
| Adresse électronique : | michel.duprez@math.cnrs.fr |
| Page web : | http://mduprez.perso.math.cnrs.fr/ |


## Sommaire :



## Thèmes de recherche - Mots clés

Équations aux dérivées partielles, calcul scientifique, analyse numérique, contrôlabilité, contrôle optimal, éléments finis

# 1 Fiche de synthèse

## Thèmes de recherche

**Mots-clés :** Équations aux dérivées partielles, calcul scientifique, analyse numérique, contrôlabilité, contrôle optimal, éléments finis

## Situation professionnelle

**Post doctorant** au sein de l'université Aix-Marseille

**Affilié** à l'Institut de Mathématiques de Marseille (I2M) et au Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes (LSIS)

**Projet :** "Étude de problèmes de contrôle liés aux mouvements de foules"

## Formation

**Docteur en mathématiques appliquées** de l'Université de Franche-Comté
Thèse encadrée par Farid Ammar Khodja et Franz Chouly et soutenue en novembre 2015.
Sujet : "Contrôlabilité de quelques systèmes gouvernés par des équations paraboliques"

**Master recherche** Mathématiques Approfondies, Université de Franche-Comté, 2012.

**Agrégé** de mathématiques, 2011.

**Master** en Histoire des Sciences, Université de Franche-Comté, 2010.

**Certifié** de mathématiques, 2010.

## Publications et conférences

- **4 articles acceptés** *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations (COCV),*
  *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (JMPA),*
  *Mathematical Control and Related Fields (MCRF) - AIMS*
  *Positivity*
- **4 articles soumis**
- **10 exposés dans des conférences internationales**
- **12 séminaires et groupes de travail**
- **1 poster**

## Activités d'enseignement

**Université et École d'ingénieur** *3 avenants doctoraux (64h/ans) et un ATER (192h)*

- — Cours et TD Algèbre et Analyse L1
- — TD Éléments d'algèbre L1
- — TP Approximation et Signaux M1
- — TP Optimisation M1
- — TD Mathématiques L1 SVT
- — TD Outils Mathématiques L1
- — TD Algèbre Bilinéaire L2
- — TD Mathématiques, école d'ingé., L3
- — TD Méth. Num., école d'ingé., L3
- — Référent de stages

# 2 Curriculum vitæ

| | |
|---|---|
| Nom : | **Michel Duprez** |
| Date de naissance : | 15 avril 1985 |
| Nationalité : | Française |
| État civil : | Pacsé |
| Titre : | Docteur en Sciences (Spécialité *Mathématiques appliquées*) ;<br>Qualification en sections 25 et 26 du CNU. |

## Situation professionnelle actuelle

**2016–2017** **Contrat post-doctoral** à l'université Aix-Marseille.

**Affilié** à l'Institut de Mathématiques de Marseille (I2M) et au Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes (LSIS)

**Projet :** "Étude de problèmes de contrôle liés aux mouvements de foules"

## Expériences professionnelles

**2015–2016** **Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche** à l'UFR Sciences et Techniques de Besançon.

**2012–2015** **Contrat doctoral** au Laboratoire de Mathématiques de Besançon.
Financement : Région de Franche-Comté.
Avenant d'enseignement à l'UFR Sciences et Techniques de Besançon.

## Formation universitaire

**2012–2015** **Thèse de mathématiques appliquées** à l'Université de Franche-Comté.

Encadrement :
Farid Ammar Khodja, Maître de Conférences, Université de Franche-Comté
Franz Chouly, Maître de Conférences, Université de Franche-Comté

Titre :
*"Contrôlabilité de quelques systèmes gouvernés par des équations paraboliques".*

Soutenance :
Le 26 novembre 2015 à Besançon.

Rapporteurs :
Franck Boyer, Professeur, Université Toulouse 3
Enrique Fernandez-Cara, Professeur, Universidad de Sevilla
Emmanuel Trélat, Professeur, Université Paris 6

Examinateurs :
Assia Benabdallah , Professeur, Université Aix-Marseille 2
Manuel Gonzalez-Burgos, Professeur, Universidad de Sevilla
Arnaud Münch, Professeur, Université Clermont-Ferrand 2

**2011–2012** **Master Recherche "Mathématiques approfondies"** à l'Université de Franche-Comté, Mémoire de M2 intitulé *"Contrôlabilité approchée, optimisation et convergence numérique des équations de diffusions linéaires"*, sous la direction de Farid Ammar Khodja et Franz Chouly.

**2010–2011** **Préparation à l'agrégation externe de mathématiques**, option Probabilités et Statistiques, à l'Université de Franche-Comté. Classement : 146$^{\text{ème}}$.

**2009–2010** **Master professionnel "histoire des sciences"** à l'Université de Franche-Comté. Mémoire de M2 intitulé *"Les Sphériques de Ménélaüs"*, sous la direction de Stéphan Neuwirth (maître de conférences, Université de Franche-Comté).

**2009–2010** **Préparation du CAPES externe de mathématiques**, à l'Université de Franche-Comté. Classement : 58$^{\text{ème}}$.

## Thématiques de recherche

Avant une description détaillée de mes activités de recherche, voici une liste non exhaustive des thématiques auxquelles ont appartenu mes différents axes de recherche durant ma thèse et après :

- **Étude théorique de la contrôlabilité des systèmes d'EDP**
  Inégalités de Carleman, méthode des moments, résolubilité algébrique
- **Estimateurs d'erreur *a posteriori* de schémas numériques**
  Méthode goal oriented, éléments finis
- **Étude des mouvements de foules**
  Équations de transport non locales

## Compétences en calcul scientifique et informatique

### Développement de codes de calcul

- Durant ma thèse, j'ai développé un code de calcul permettant de distinguer la contrôlabilité approchée de la contrôlabilité exacte. Pour d'avantage de détails, voir section 1.1 du résumé des travaux de recherche.
- Depuis l'année dernière, je suis impliqué dans un projet sur des estimateurs *a posteriori* appliqués à des tissus mous humains. L'implémentation s'effectue avec des données de patients. Pour d'avantage de détails, voir section 2.2 du résumé des travaux de recherche et section 2.1 du programme de recherche.
- J'ai également commencé une collaboration avec A. Münch (Clermont-Ferrand) avec qui j'étudie l'approximation numérique du coût du contrôle pour l'équation de la chaleur. Pour d'avantage de détails, voir section 3.4 du programme de recherche.

| | |
|---|---|
| *Systèmes d'exploitation* | Linux, Windows |
| *Environnements de calcul* | Matlab/Scilab (calcul numérique)<br>Maple (calcul formel)<br>Python (langage)<br>FEniCS (solveur systèmes variationnels) |
| *Autres logiciels* | LaTeX, html, OpenOffice |

## Compétences linguistiques

*Anglais/Allemand :* bon niveau

# 3 Publications et pré-publications

## Articles acceptés dans des revues internationales à comité de lecture

Les travaux ci-dessous sont détaillés dans la partie 7 “Résumé des travaux de Recherche”.

[1] F. Ammar Khodja, F. Chouly et M. Duprez, *Partial null controllability of parabolic linear systems,* Math. Control Relat. Fields, 2 (2016), p.185-216.

[2] M. Duprez, *Controllability of a 2×2 parabolic system by one force with space-dependent coupling term of order one,* à paraître dans Control, Optimisation and Calculus of Variations (COCV) - ESAIM (2016), 25 pages.

[3] M. Duprez et P. Lissy, *Indirect controllability of some linear parabolic systems of $m$ equations with $m-1$ controls involving coupling terms of zero or first order,* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 106 (2016), p. 905-934.

[4] M. Duprez et A. Perasso, *Criterion of positivity for semilinear problems with applications in biology,* accepté dans le journal Positivity, 10 pages.

## Travaux soumis

Les travaux ci-dessous sont détaillés dans la partie 7 “Résumé des travaux de Recherche”.

[5] M. Duprez et P. Lissy, *Positive and negative results on the internal controllability of parabolic equations coupled by zero and first order terms,* soumis à Journal of Evolution Equations - Springer, 17 pages.

[6] M. Duprez et G. Olive, *Perturbations of controlled systems,* soumis à Mathematical Control and Related Fields (MCRF) - AIMS, 20 pages.

[7] M. Duprez, M. Morancey et F. Rossi, *Controllability and optimal control of the transport equation with a localized vector field,* soumis à 25th Mediterranean Conference on Control and Automation, 6 pages.

[8] M. Duprez et F. Rossi, *Time optimal control for continuous mass displacement,* soumis à 56th IEEE Conference on Decision and Control, 7 pages.

## Poster

[9] M. Duprez, *Indirect controllability of some linear parabolic systems coupled by an operator of first order,* poster à la conférence “Contrôle des EDP et applications", du 4 au 13 novembre 2015 à Marseille.

## Travaux en cours de rédaction

Les travaux ci-dessous sont en cours de rédaction et sont détaillés dans la partie 7 “Résumé des travaux de recherche”.

[10] M. Duprez, M. Morancey et F. Rossi, *Controllability of the continuity equation with a localized control*

[11] S. P. A. Bordas, M. Bucki, F. Chouly, M. Duprez, C. Lobos, A. Lozinski, P.-Y. Rohan, S. Tomar, *A preliminary study on some a posteriori error estimates for soft-tissue biomechanic.*

Les articles [1–8], ainsi que le manuscrit de ma thèse, sont accessibles sur la page :

`http://mduprez.perso.math.cnrs.fr/Recherches.html`

et peuvent être adressés aux rapporteurs à leur demande, au format électronique ou papier.

# 4 Activités d'enseignement

La quasi-totalité des enseignements de mes trois avenants d'enseignement à mon contrat doctoral et de mon contrat d'attaché temporaire d'enseignement de recherche a été dispensée à l'UFR Sciences et Techniques de Franche-Comté. J'ai également obtenu une dérogation afin d'intervenir à l'Institut Supérieur d'Ingénieurs de Franche-Comté (ISIFC). Les **documents pédagogiques** que j'ai conçus durant ces contrats sont accessibles à l'adresse suivante :

`http://mduprez.perso.math.cnrs.fr/Enseignements.html`

## Résumé

**2015–2016** Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche (192 heures/an), au sein de l'UFR Sciences et Techniques de Franche-Comté

**2012–2015** Avenant d'enseignement au contrat doctoral (64 heures/an), au sein de l'UFR Sciences et Techniques de Franche-Comté.

**Juil. 2011** Agrégation externe de mathématiques, option Probabilité/Statistiques. Classement : 146$^{\text{ème}}$

**Juil. 2010** CAPES externe de mathématiques. Classement : 58$^{\text{ème}}$

## UFR Sciences et Techniques de Besançon (2011-2016)

À la faculté des sciences de Franche-Comté, les étudiants ont le choix en première année entre deux filières : sciences et techniques (ST) ou sciences de la vie et de la terre (SVT). Ils se spécialisent ensuite au second semestre.

| **Matière** | **Niveau** | **Nature** | **Effectifs** | **Volume horaire** |
|---|---|---|---|---|
| Algèbre | licence 1 ST | Cours & TD | 25-35 | 156 h |
| Analyse | licence 1 ST | Cours & TD | 25-30 | 104 h |
| Mathématiques | licence 1 SVT | TD | 30-35 | 34 h |
| Outil math. | licence 1 Info | TD | 20-25 | 20 h |
| Éléments d'algèbre | licence 1 info. | TD | 25-30 | 20 h |
| Algèbre bilinéaire | licence 2 Math | TD | 15-20 | 40 h |
| Approximation et signaux | master 1 stat. | TP | 10-15 | 12 h |
| Optimisation et prog. lin. | master 1 stat. | TP | 10-15 | 12 h |
| | | | **Total** | **398 h** |

## Institut Supérieur d'Ingénieurs de Franche-Comté (2015-2016)

L'ISIFC délivre un diplôme d'ingénieur dans une spécialité qui est le génie biomédical, et prépare à des métiers liés aux dispositifs médicaux (recherche et développement, aspects réglementaires). Les élèves-ingénieurs y reçoivent une formation pluridisciplinaire, avec à la fois des sciences pour l'ingénieur, des sciences médicales et biologiques et des sciences pour l'entreprise. J'y suis intervenu dans l'enseignement des mathématiques. J'y ai également tenu lieu de référent pour les stages qu'ont effectués les étudiants en milieu hospitalier, dans les laboratoires et dans l'industrie.

| Matière | Niveau | Nature | Effectifs | Volume horaire |
|---|---|---|---|---|
| Mathématiques | 1ère année (équiv. L3) | TD | 25-30 | 24 h |
| Méthodes numériques | 1ère année (équiv. L3) | TD | 15-20 | 8 h |
| Référent de stage | Hospitalier (équiv. L3) | | 1 | 2 h |
| Référent de stage | Fin d'étude (équiv. M2) | | 2 | 8 h |
| | | | **Total** | **42 h** |

## Description des enseignements

Dans cette section sont décrits les différents enseignements répertoriés dans les tableaux ci-dessus.

- **Référent de stage**
  Le rôle du référent consiste à s'assurer que le stage se déroule dans de bonnes conditions : il est l'interface entre le tuteur, l'étudiant et le responsable des stages. Il doit s'assurer que la mission est comprise et que le stagiaire met en œuvre une démarche de résolution appropriée. Il effectue un suivi régulier et transmet les modifications ou problèmes rencontrés au responsable des stages. En général, une visite dans l'entreprise est prévue durant le stage. Le référent évalue le mémoire du stage et participe à la soutenance. Il intervient également en tant que candide dans les autres jurys.

- **Cours et Travaux Dirigés d'Algèbre (Licence 1 Sciences)**
  Ce cours de Starter est destiné aux étudiants de première année en sciences. Il contient les premiers principes de la logique, précise les notions d'ensembles et d'applications et donne une approche rapide des polynômes. Enfin il développe entièrement la méthode du pivot pour la résolution des systèmes linéaires, ainsi que le calcul matriciel.

- **Cours et Travaux Dirigés d'Analyse (Licence 1 Sciences)**
  Ce cours de Starter est également destiné aux étudiants de première année en sciences. Dans un premier temps est introduite la notion de bijection réciproque avec une application aux fonctions trigonométriques. La seconde partie du cours est consacrée au calcul d'intégrale. Ensuite nous étudions la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1. Et dans une dernière partie, le cours traite du calcul de développements limités.

- **Travaux Dirigés de mathématiques (Licence 1 SVT)**
  Ces travaux dirigés sont destinés aux étudiants de première année de licence de Sciences de la Vie et de la Terre et sont une application directe du cours. Une première partie traite

de l'étude de fonctions afin de renforcer le calcul de limites et la notion de continuité. Une suivante aborde le calcul d'intégrales en insistant sur l'intégration par parties et le changement de variable sous le signe intégral. La dernière partie concerne l'étude d'équations différentielles appliquées à la biologie.

- **Travaux Dirigés d'Outils Mathématiques (Licence 1 Info)**
  Ces travaux dirigés s'adressent aux étudiants en première année d'informatique et constituent une application directe du cours. On y renforce le calcul de limites de suite, de développements limités et d'interpolation de polynômes vus au premier semestre.

- **Travaux Dirigés d'Élément d'Algèbre (Licence 1 Info)**
  Ces travaux dirigés sont une application directe du cours et regroupent les notions d'arithmétique, de relation d'ordre, de relation d'équivalence, de groupes et d'anneaux.

- **Travaux Dirigés d'algèbre bilinéaire (Licence 2 Math)**
  Ces travaux dirigés sont une application du cours de deuxième année de licence. Après une approche générale, le cours aborde l'étude des formes bilinéaires symétriques sur un espace vectoriel de dimension finie sur un corps de caractéristique 0, comme par exemple $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$. Le cas particulier des produits scalaires sur espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ est étudié en détail dans le cadre de la dimension finie ou non. Enfin on termine par une étude des formes hermitiennes sur les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

- **Travaux Dirigés de Mathématiques (3ème année ISIFC)**
  Lors de ces travaux dirigés, nous commençons par aborder les notions de continuité et de dérivabilité en dimension supérieure. Nous étudions ensuite certains aspects de l'algèbre linéaire, des développements limités, des équations différentielles et du calcul d'extrema.

- **Travaux Dirigés de Méthodes Numériques (3ème année ISIFC)**
  Ces travaux dirigés sont consacrés à l'étude des polynômes d'interpolation, à la résolution des systèmes linéaires et aux méthodes de différences finies et d'éléments finis.

- **Travaux pratiques d'Approximation et Signaux (Master 1 Stat)**
  Ces travaux pratiques sont une mise en application du cours que les étudiants suivent en parallèle. L'objectif est qu'ils manipulent les séries de Fourier, différentes bases de Hilbert et des ondelettes. L'implémentation numérique a été effectuée à l'aide Scilab.

- **Travaux pratiques d'Optimisation et Programmation Linéaire (Master 1 Stat)**
  Le but des ces travaux pratiques est d'apprendre aux étudiants les différentes façons de calculer le minimum d'une fonctionnelle et de résoudre des systèmes linéaires. L'implémentation numérique a été effectuée à l'aide Scilab.

## Institut de Recherche en Enseignement Mathématique

L'Institut de Recherche en Enseignement Mathématiques de Franche-Comté s'inscrit dans une démarche de réflexion sur l'enseignement des mathématiques en primaire et dans le secondaire. Il est constitué de 12 groupes de travail composés d'enseignants du supérieur du secondaire et de retraités. Les heures que j'ai investies dans l'IREM sont en partie comprises dans les différentes missions d'enseignement de mon contrat doctoral avec un total de 38 heures sur 3 ans. Voici les principales actions dans lesquelles je me suis impliqué.

**2012–2016** **Groupe de travail IREM Math-Physique.**
Ce groupe de travail se tient tous les mois et son objectif est d'élaborer des activités à destination des lycéens rattachant les mathématiques et la physique.
`http://www-irem.univ-fcomte.fr`

**2013–2014** **Co-organisateur d'un stage à destination des enseignants du secondaire.**
Lors de ce stage, les intervenants ont présenté différentes activités construites par le groupe de travail Math-Physique.

## Divers

- Participation à l'animation de stands lors de la Fête de la Science (animations pour un public du secondaire)
- Participation aux journées du laboratoire (atelier pour un public du secondaire)
- Participation aux jurys d'oraux blancs d'agrégation et de CAPES interne/externe de mathématiques.

## Personnes réferentes

Les personnes suivantes pourront être consultées sur mes aptitudes à enseigner :

— **Philippe Leborgue**, Maître de conférences au Laboratoire de Mathématiques de Besançon
E-mail : `philippe.leborgne@univ-fcomte.fr`
Téléphone : `03 81 66 64 95`

— **Jean-Marie Crolet**, Professeur des universités à l'Institut supérieur d'ingénieurs de Franche-Comté (ISIFC)
E-mail : `jean-marie.crolet@univ-fcomte.fr`
Téléphone : `03 81 66 63 16` / `03 81 66 25 82 (ISIFC)`

Par ailleurs, une **lettre de recommandation** de Philippe Le Borgne concernant l'enseignement sera envoyée directement au président du comité de sélection.

– philippe.leborgne@univ-fcomte.fr, 03 81 66 64 95

## Conclusion

Au cours des dernières années, j'ai enseigné dans différentes branches des mathématiques et à des publics très variés : étudiants de la première année de licence jusqu'à la première année de master ; école d'ingénieur, université ; filières biologiques, mathématiques, informatiques...

En ce qui concerne mon intégration au sein du département d'enseignement, je suis prêt à m'adapter aux besoins locaux et aux différentes filières, aussi bien en termes d'enseignements dispensés que de responsabilités pédagogiques.

# 5 Responsabilités collectives et animations scientifiques

## Animations scientifiques

**Juil. 2015** **Co-organisateur des Journées de Modélisation BioMathémathique de Besançon**, *Métabief (25).*
Le colloque MB2 vise à regrouper des chercheurs de deux communautés, mathématiciens et biologistes, afin de partager des réflexions scientifiques contemporaines d'ordre biomathématique.
`http://mb2.univ-fcomte.fr`

**Mars 2015** **Co-organisateur des journées Thématiques théoriques et numériques en contrôle et problèmes inverses pour les EDPs**, *Besançon.*
Les journées se sont tenues à Besançon du 2 au 7 mars 2015. Le but de cette rencontre internationale a été de réunir des chercheurs du domaine et elle a comporté entre autres deux mini-cours post-doctoraux.
`http://trimestres-lmb.univ-fcomte.fr/pdena.html`

**2013–2014** **Co-organisateur des Journées des Ecoles Doctorales Carnot-Pasteur**, *Dijon, puis Besançon.*
Durant les JED, 8 doctorants et étudiants en master de Besançon et Dijon exposent leur thématique de recherche, et un jury composé de 4 permanents décerne un prix au meilleur exposant.

## Responsabilités collectives

**2014–2015** **Responsable du séminaire doctorant**, *LMB, Besançon.*
Les séminaires ont lieu toutes les deux à trois semaines, et permettent aux doctorants d'effectuer un premier exposé. Cet exposé est vulgarisé afin d'être accessible pour les doctorants des autres équipes du laboratoire de mathématiques.

**2014–2015** **Représentant des doctorants au conseil de l'école doctorale Carnot-Pasteur**.
Le rôle du Conseil de l'école Doctorale consiste entre autres à examiner les candidatures pour contrats doctoraux au sein de l'école Carnot-Pasteur, à établir un classement pour l'attribution des bourses ministérielles et à élaborer la maquette des formations doctorales.

# 6 Activités de recherche

## Thématiques de recherche

- **Étude des mouvements de foules**
  Équations de transport non locales
- **Estimateurs d'erreur *a posteriori* de schémas numériques**
  Méthode goal oriented, éléments finis
- **Étude théorique de la contrôlabilité des systèmes d'EDP**
  Inégalités de Carleman, méthode des moments, résolubilité algébrique

## Communications orales en conférences sur invitation personnelle

**Déc. 2016** *Workshop on control, inverse problems and stabilization of infinite dimentional systems*, Marrakesh, Maroc.

**Déc. 2016** *Workshop on Parabolic Control with Hyperbolic Effects*, Toulouse.

**Juin 2016** *Nonlinear Partial Differential Equations and Applications*, Paris.

**Mai 2016** *Canum*, Obernai.

**Mars 2016** *Journée des Jeunes Edépistes Français*, Bordeaux.

**Août 2015** *Partial differential equations, optimal design and numerics*, Benasque (Espagne).

**Juill. 2015** *Journées de Modélisation BioMathématique de Besançon*, Besançon.

**Mars 2015** *Journées bisontines sur le contrôle quantique : systèmes d'EDPs et applications à l'IRM*, Besançon.

**Sept. 2014** *Contrôle, Problème inverse et Applications*, Clermont-Ferrand.

**Juin 2014** *Journée des Ecoles Doctorales*, Dijon.

## Exposés dans des séminaires ou des groupes de travail

**Jan. 2017** Séminaire Dynamique Quantique et Classique, Centre de Physique Théorique, Marseille.

**Nov. 2016** Groupe de travail contrôle, Institut de Mathématiques de Marseille.

**Oct. 2016** Séminaire Analyse Appliquée, Institut de Mathématiques de Marseille.

**Mars 2016** Séminaire MIP, Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal, Clermont-Ferrand.

**Mars 2016** Séminaire EDP, Institut Élie Cartan de Lorraine, Nancy.

**Fév. 2016** Séminaire MIP, Institut de Mathématiques de Toulouse.

**Fév. 2016** Séminaire d'analyse, Laboratoire Amiénois de Mathématiques Fondamentales et Appliquées.

**Jan. 2016** Radon Group seminars, Linz (Autriche).

**Oct. 2015** Séminaire EDP, Laboratoire de Mathématiques de Besançon

**Jan. 2015** Groupe de travail Contrôle, Institut de Mathématiques de Marseille.

**Juin 2014** Groupe de travail math/bio, Institut de Mathématiques de Marseille.

**Avril 2013** Séminaire doctorant, Laboratoire de Mathématiques de Besançon.

## Présentation de poster en conférence

**Nov. 2015** *Contrôle des EDP et applications*, Marseille.

## Séjours scientifiques

**Mars 2016** Laboratoire de Mathématiques de Clermont-Ferrand, avec A. Münch (1 semaine).

**Juil. 2015** CEREMADE (Paris), avec P. Lissy et J. Salomon (2 semaines).

**Mai 2015** Faculté de Mathématiques de Séville, avec M. Gonzalez Burgos (2 semaines).

**Fév. 2015** CEREMADE (Paris), avec P. Lissy (1 semaines).

**Mai 2014** Institut de Mathématiques de Marseille, avec F. Hubert, A. Benabdallah et F. Boyer (2 semaines).

## Personnes référentes

Les personnes suivantes connaissent particulièrement bien mon travail :

— **Farid Ammar Khodja** et **Franz Chouly** (directeurs de thèse)
  Contact :

  - `farid.ammar-khodja@univ-fcomte.fr`
    `03 81 66 63 45`
  - `franz.chouly@univ-fcomte.fr`
    `03 81 66 64 89`

— **Franck Boyer**, **Enrique Fernandez Cara** et **Emmanuel Trélat** (rapporteurs de ma thèse)

Contact :

- `franck.boyer@math.univ-toulouse.fr`
  05 61 55 76 48
- `cara@us.es`
  00 34 954 557 992
- `emmanuel.trelat@upmc.fr`
  01 44 27 91 64

Par ailleurs, les **lettres de recommandation** de mes directeurs de thèse (Farif Ammar Khodja et Franz Chouly), de mon encadrant de post-doc (Francesco Rossi) et de Jérôme Le Rousseau seront envoyées directement au président du comité de sélection. À toutes fins utiles, voici leurs coordonnées :

- `farid.ammar-khodja@univ-fcomte.fr`
  03 81 66 63 45
- `franz.chouly@univ-fcomte.fr`
  03 81 66 64 89
- `francesco.rossi@lsis.org`
  04 91 05 60 23
- `jlr@math.univ-paris13.fr`

# 7 Résumé des travaux de recherche

Les articles [1–7] cités ci-dessous sont référencés dans la partie 3 et également dans la bibliographie générale donnée dans la partie 8. Ils sont accessibles sur ma page web :

`http://mduprez.perso.math.cnrs.fr`.

Ce rapport se décompose en trois sections qui concernent respectivement la contrôlabilité des systèmes paraboliques, des applications en biologie et la contrôlabilité des systèmes hyperboliques.

Deux problématiques différentes sont présentées en **contrôlabilité des systèmes paraboliques**. La première concerne la contrôlabilité partielle des systèmes paraboliques. Plus précisément, lorsqu'il n'est pas possible de contrôler toutes les composantes de la solution d'un système, est-il possible de n'en contrôler qu'une partie ? Ce problème est détaillé dans la section 1.1 et a été supervisé par mes directeurs de thèse F. Ammar Khodja et F. Chouly (LMB, Besançon). La seconde partie, décrite dans la section 1.2, concerne la contrôlabilité des systèmes paraboliques couplés par des opérateurs d'ordre 1 et a permis d'apporter des améliorations à certains outils tels que la méthode des moments et la résolubilité algébrique. Elle contient, quant à elle, trois études différentes et a été l'occasion d'une collaboration avec P. Lissy (CEREMADE, Paris).

Je présente ensuite deux **travaux appliqués à la biologie**. Le premier est une étude sur la positivité de systèmes semi-linéaires. Avec A. Perasso (Chrono-Environnement, Besançon), nous établissons un critère simple et nous montrons son efficacité à travers plusieurs exemples provenant de la biologie. Le second travail a été effectué en collaboration avec S. Bordas, S. Tomar (Université du Luxembourg), M. Bucki (entreprise Texisense), P.-Y. Rohan (ENSAM, Paris), C. Lobos (Chili), F. Chouly et A. Lozinski (LMB, Besançon). Il s'agit d'une étude préliminaire sur des estimateurs *a posteriori* pour des tissus mous humains.

Deux travaux sur la **contrôlabilité des systèmes hyperboliques** sont ensuite développés. Le premier est consacré à la perturbation des systèmes contrôlés et a été l'occasion d'une collaboration avec G. Olive (IMB, Bordeaux). Nous établissons un critère général et l'utilisons pour résoudre trois problèmes ouverts. Le second travail a été effectué durant mon post-doc en collaboration avec F. Rossi (LSIS, Marseille) et M. Morancey (I2M, Marseille). Il concerne la contrôlabilité d'une équation de transport liée à une étude sur les mouvements de foules. Nous montrons qu'un aspect géométrique et un aspect analytique entrent en jeu dans ce type de problèmes.

## 1 Contrôlabilité des systèmes paraboliques

Mon activité principale de recherche concerne la théorie du contrôle. Pour un système parabolique de la forme

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + f(y, \nabla y) + Bu, \\ y(0) = y^0 \end{cases} \tag{1}$$

et une cible $y_T$, la contrôlabilité consiste à étudier l'existence ou non d'une fonction $u$, appelée *contrôle*, telle que la solution du système (1) soit égale à $y_T$ ou proche de $y_T$. La contrôlabilité des systèmes paraboliques est utilisée dans l'étude de réactions chimiques (Cf [30, 19]) et une large variété de situations biologiques et physiques (Cf [40, 57, 43]).

Ces quinze dernières années, la contrôlabilité des systèmes paraboliques a suscité un grand intérêt au sein de la communauté scientifique. Il a d'abord été démontré que, dans le cas de matrices de couplage et de contrôle constantes et dépendant du temps, la contrôlabilité à zéro et la contrôlabilité approchée ont lieu sous les mêmes conditions que pour les systèmes d'équations différentielles ordinaires (Cf [14, 15]). Mais plus récemment, dans [25, 48] et [16], les auteurs ont mis en évidence des phénomènes complètement différents de ceux que l'on peut retrouver dans le cas d'une seule équation.

## 1.1 Contrôlabilité partielle des systèmes paraboliques linéaires

Cette étude de la contrôlabilité partielle des systèmes paraboliques a été entreprise durant ma thèse sous la supervision de F. Ammar Khodja et F. Chouly. La question est simple : lorsqu'il n'est pas possible de contrôler toutes les composantes d'un système d'équations aux dérivées partielles, ici en l'occurrence paraboliques, peut-on n'en contrôler qu'une partie ? Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + Ay + B\mathbb{1}_\omega u & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ y(\cdot,0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

où $T > 0$, $\omega \subset \Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$ $(N \in \mathbb{N}^*)$, $u$ est le contrôle, $y^0$ la condition initiale, $A(x,t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ la matrice de couplage et $B(x,t) \in \mathcal{L}(\mathbb{M}^m, \mathbb{R}^n)$ la matrice de contrôle. Pour un entier $p \in \{1, ..., n\}$, on dit que le système (2) est *partiellement contrôlable à zéro* (*resp. partiellement approximativement contrôlable*) si l'on peut trouver pour chaque donnée initiale $y^0$ un contrôle $u$ tel que les $p$ premières composantes de la solution $y$ du système (2) soient nulles (resp. aussi proches que l'on veut d'une cible $y_T$) à l'instant $T$.

En ce qui concerne la contrôlabilité partielle d'équations paraboliques, à ma connaissance, le seul résultat antérieur est [39] où les auteurs montrent la non-contrôlabilité d'une équation de la chaleur avec retard. Cette équation peut se réécrire sous la forme d'une équation parabolique couplée avec une équation différentielle ordinaire.

Trois résultats principaux sont issus de cette étude. Le premier donne une condition nécessaire et suffisante de type Kalman de contrôlabilité partielle à zéro et de contrôlabilité partielle approchée lorsque les matrices de couplage et de contrôle sont constantes. Le deuxième est une condition nécessaire pour des matrices de couplage et de contrôle qui dépendent du temps. Ils ont tous deux été établis en adaptant la caractérisation de la contrôlabilité partielle des EDO (préalablement étudiée) et en s'appuyant sur [14]. Considérons maintenant le système parabolique de deux équations contrôlées par un seul contrôle

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \Delta y_1 + \alpha y_2 + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ \partial_t y_2 = \Delta y_2 & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ y_1 = y_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ y_1(\cdot,0) = y_1^0,\ y_2(\cdot,0) = y_2^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Dans un troisième résultat, nous montrons que nous avons contrôlabilité partielle à zéro du système (3) lorsque les coefficients de Fourier de $\alpha$ sont exponentiellement décroissants. Nous donnons également un exemple explicite de fonction $\alpha$ pour lequel le système (3) n'est pas partiellement contrôlable à zéro.

Comme conséquence de la propriété de continuation unique de l'équation de la chaleur, le système (3) est toujours partiellement approximativement contrôlable, *i.e.* quelle que soit la donnée initiale $y^0$ et le couplage $\alpha$, il existe un contrôle $u$ tel que la première composante de la solution soit nulle à l'instant $T$. Nous avons donc un exemple de système pour lequel la contrôlabilité partielle à zéro et la contrôlabilité partielle approchée ne sont pas équivalentes. Cela montre d'ailleurs la complexité du problème.

Les résultats concernant le système (3) ont été validés numériquement. Pour cela, j'ai utilisé la HUM méthode initialement introduite par R. Glowinski, J.-L. Lions et J. He dans [35, 44] en suivant la stratégie de F. Boyer donnée dans [20]. Je me suis placé dans un cadre que l'on peut retrouver dans [20, 21, 22, 23, 24, 42]. Le système (3) a été discrétisé avec un $\theta$-schéma en temps et des éléments finis de Lagrange en espace. L'algorithme a été implémenté en *Python* à l'aide principalement des librairies *NumPy, Scipy*, *Dolfin* et *FEniCS* (Cf [41, 46]). Le code ayant servi aux simulations numériques est disponible sur ma page web :

`http://mduprez.perso.math.cnrs.fr/numerique/programme.zip`

*En collaboration avec F. Ammar Khodja et F. Chouly (LMB, Besançon).*
*Voir référence [1].*

## 1.2 Contrôlabilité de systèmes paraboliques couplés par des opérateurs différentiels d'ordre un

La contribution que je souhaite présenter ici concerne une étude sur la contrôlabilité de systèmes paraboliques couplés par des opérateurs d'ordre un. Considérons le système composé de deux équations paraboliques et contrôlé par une force de la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t y = \operatorname{div}(D\nabla y) + G \cdot \nabla y + Ay + B\mathbb{1}_\omega u & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4}$$

où $T > 0$, $\omega \subset \Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$), $u$ est le contrôle, $y^0$ est la condition initiale, $D := \operatorname{diag}(d_1, d_2)$ est dite matrice de diffusion, $A(x,t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et $G(x,t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2N})$ matrices de couplage et $B := (1\ 0)^*$ matrice de contrôle. Nous nous intéressons ici à la contrôlabilité à zéro du système (4), *i.e.* pour toute donnée initiale $y^0$, on cherche un contrôle $u$ tel que la solution $y$ soit nulle à l'instant $T$.

Avant les résultats énoncé ci-dessous, il existait essentiellement trois autres résultats. Le premier, que l'on peut trouver dans [36], suppose entre autres que le couplage d'ordre un $g_{21}$ est nul sur un ouvert non-vide de $\omega$. Le deuxième, donné dans [18], fait l'hypothèse que le bord de la zone de contrôle et le bord du domaine admettent une intersection non-vide. Finalement, le troisième résultat, établi dans [38], n'est valable que pour des coefficients constants et en dimension un dans le cadre de ce problème. Bien que ces trois travaux se basent en apparence sur des estimations de Carleman données dans [34], ce sont en fait à chaque fois des estimations différentes adaptées aux difficultés du problème et qu'il a fallu redémontrer. C'est un travail conséquent qui illustre la difficulté liée aux différentes questions de contrôlabilité de tels systèmes.

**a) Système simplifié**

Dans un premier temps, j'ai étudié dans [2] le système (4) en dimension un et sous la forme particulière suivante :

$$\begin{cases} \partial_t y_1 - \partial_{xx} y_1 = \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } (0,\pi)\times(0,T), \\ \partial_t y_2 - \partial_{xx} y_2 + p(x)\partial_x y_1 + q(x) y_1 = 0 & \text{dans } (0,\pi)\times(0,T), \\ y_1(0,\cdot) = y_1(\pi,\cdot) = y_2(0,\cdot) = y_2(\pi,\cdot) = 0 & \text{sur } (0,T), \\ y_1(\cdot,0) = y_1^0,\ y_2(\cdot,0) = y_2^0 & \text{dans } (0,\pi). \end{cases} \tag{5}$$

J'ai montré premièrement dans [2] que le système (5) est contrôlable à zéro en tout temps dès que la zone de contrôle intersecte le domaine de couplage, *i.e.*

$$(\mathrm{Supp}(p) \cup \mathrm{Supp}(q)) \cap \omega \neq \varnothing. \tag{6}$$

Lorsque (6) n'est pas satisfaite, je fournis un temps minimal de contrôlabilité à zéro dans le cas d'un contrôle agissant au bord ou à l'intérieur du domaine. Je donne également une condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité approchée.

Ces résultats sont obtenus principalement à l'aide de la méthode des moments (voir [32, 31]). Elle n'avait pas encore été utilisée pour l'étude de ce problème jusqu'à présent. La stratégie générale est inspirée de [16] où les auteurs étudient le temps minimal du système (5) lorsque $p = 0$. L'innovation scientifique de [2] a été de mettre en évidence que le temps minimal peut être artificiel et qu'à l'aide d'une perturbation adéquate du système (5) il est possible de montrer que le système (5) est contrôlable à zéro *en tout temps* lorsque (6) est satisfaite.

*Voir référence [2].*

**b) Coefficients constants**

Avec P. Lissy, nous avons montré dans [3] que, lorsque les matrices $G$ et $A$ sont constantes en temps et en espace, le système (4) est contrôlable à zéro au temps $T$ si et seulement si la condition suivante est satisfaite

$$g_{21} \neq 0 \text{ ou } a_{21} \neq 0. \tag{7}$$

Les résultats sont obtenus à l'aide de la méthode de contrôle fictif combinée avec la notion de résolubilité algébrique d'opérateurs différentiels qui a été introduite dans [37].

P. Lissy et J.-M. Coron ont utilisé pour la première fois la notion de résolubilité algébrique pour étudier la contrôlabilité des équations aux dérivées partielles dans [29]. Ayant une certaine expérience de la méthode par contrôle fictif, P. Lissy et moi-même nous sommes associés afin de résoudre le problème de contrôlabilité à zéro du système (4).

Afin d'obtenir de nouveaux résultats sur ce problème, P. Lissy et moi-même avons souhaité opter pour d'autres techniques que celles employées habituellement lors de la résolution de tels problèmes. Nous avons donc utilisé la notion d'inversion d'opérateurs différentiels par résolubilité algébrique. Nous l'avons combinée à une méthode par contrôle fictif et des estimations de Carleman appropriées, ce qui était totalement nouveau pour l'étude de ce problème.

*En collaboration avec P. Lissy (CEREMADE, Paris).*
*Voir référence [3].*

### c) Mise en évidence d'un nouveau phénomène

Avec P. Lissy, nous avons également étudié le cas de coefficients dépendants du temps et de l'espace dans [5]. Les résultats de [5] sont établis dans un cadre général, mais afin de mieux comprendre cette contribution, considérons le système simplifié en dimension un suivant :

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \partial_{xx} y_1 + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ \partial_t y_2 = \partial_{xx} y_2 + \partial_x y_1 + \alpha y_2 & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{8}$$

Nous avons montré dans [5] les résultats positif et négatif suivants :

(i) Si le coefficient $\alpha$ n'est pas constant sur la zone de contrôle $\omega$, alors le système (8) est contrôlable à zéro (donc approximativement contrôlable) au temps $T$.

(ii) Il existe des coefficients $\alpha$ constants sur la zone de contrôle mais qui ne sont pas constants sur tout $\Omega$ tels que le système (8) ne soit pas approximativement contrôlable (donc non contrôlable à zéro) au temps $T$.

Ces résultats sont importants pour la compréhension de la contrôlabilité du système (8) pour les raisons suivantes : premièrement, le résultat du second item est le premier résultat négatif de la littérature. Ceci peut s'expliquer par le fait que la condition donnée dans le premier item est génériquement toujours vraie. Donc les coefficients $\alpha$ pour lesquels le système (8) n'est pas approximativement contrôlable sont très "rares". Deuxièmement, étant donné que le coefficient $\alpha$ du contre-exemple n'est pas constant sur tout l'espace $\Omega$, il est possible de placer la zone de contrôle de telle sorte que le système devienne contrôlable. Nous avons donc une condition géométrique pour la contrôlabilité, ce qui est très surprenant pour les systèmes paraboliques couplés dont la zone de contrôle et la zone de couplage s'intersectent. C'est d'ailleurs à nouveau le premier résultat de la littérature dans ce sens.

*En collaboration avec P. Lissy (CEREMADE, Paris).*
*Voir référence [5].*

## 2 Application en biologie

Je présente dans cette section deux études différentes. La première, en collaboration avec A. Perasso, concerne la positivité de systèmes semi-linéaires provenant de la biologie. Dans la seconde, nous montrons avec S. P. A. Bordas, M. Bucki, F. Chouly, C. Lobos, A. Lozinski, P.-Y. Rohan et S. Tomar l'efficacité des estimateurs *a posteriori* de type *goal oriented* sur des maillages provenant de données patients. Ce sont deux travaux effectués durant mon année d'ATER à l'UFR sciences et techniques de Besançon.

### 2.1 Critère de positivité pour des problèmes semi-linéaires et application en biologie

Dans une large variété de modélisations mathématiques de phénomènes naturels, la quantité de matière qui est décrite à travers le système mathématique doit satisfaire des propriétés de positivité afin d'assurer une réalité physique (voir par exemple [12], [59],...). Une proportion non-négligeable des systèmes dynamiques qui décrivent l'évolution de quantités de matière au cours du temps sont non-linéaires, mais, fréquemment, ces effets non-linéaires peuvent être vus comme des perturbations de la dynamique linéaire, ce qui peut mener à la formulation suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = \overbrace{Ay(t)}^{\text{dynamiques linéaires}} + \overbrace{f(y(t),t)}^{\text{perturbations}}, t \geq 0, \\ y(0) = y^0, \end{cases} \tag{9}$$

où $y(t)$ est la quantité de matière modélisée au temps $t$ qui, mathématiquement, vit dans un Banach Lattice (espace de Banach partiellement ordonné). Lorsque nous imposons une condition initiale $y^0$ positive, la question de positivité est alors cruciale à étudier. Dans le cas d'un opérateur $A$ de dimension finie, cette question a été intensivement étudiée (voir par exemple [58]). Pourtant, à ma connaissance, il n'existe pas de critère général de positivité dans le cas où $A$ est un opérateur différentiel, *i.e.* lorsque la première équation de (9) peut s'écrire comme une équation aux dérivées partielles, bien que de tels opérateurs soient intensivement utilisés en bio/math, et également dans d'autres domaines scientifiques. Par exemple, dans le cas spécifique de la biologie, nous pouvons rencontrer l'utilisation de modèles de dynamiques de populations structurées, où l'opérateur est de type transport, ou l'utilisation de processus diffusifs, où les modèles contiennent un opérateur de Laplace (voir [54] pour un survey des résultats de positivité dans le cas de systèmes de type réaction-diffusion).

Soit $\mathcal{W}$ un Banach Lattice (espace de Banach muni d'un ordre partiel) et considérons le système (9) où $A : D(A) \subset \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ est générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ semigroupe positif et $f : \mathcal{W} \times \mathbb{R}^+ \to \mathcal{W}$ est une application continue par rapport à $t$ et localement Lipschitzienne par rapport à $y$ et uniformément en $t$. Nous avons montré que pour une donnée initiale $y^0 \in \mathcal{W}$, si l'on suppose que pour tout $m > 0$, il existe $\lambda_m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $z \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{W}^+ \cap B(0,m))$,

$$f(z(t),t) + \lambda_m z(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

alors il existe une unique solution mild positive maximale.

L'objectif de ce travail a été de donner un critère simple permettant de montrer le caractère bien posé et la positivité pour le problème semi-linéaire (9) pour une large classe d'opérateurs différentiels linéaires $A$ et de fonctions non-linéaires $f$. Afin d'illustrer la faisabilité et l'efficacité de ce critère, nous l'avons utilisé à travers trois exemples de modèles provenant de biologie mathématique : épidémiologie (voir par exemple [50, 49]), prédation (voir [51]) et oncologie (voir [27]).

*En collaboration avec A. Perasso (Chrono-Environnement, Besançon).*
*Voir référence [4].*

## 2.2 Estimateurs *a posteriori* pour les équations élastiques

Pour beaucoup d'applications en biomécanique clinique, un point critique reste la fiabilité des résultats obtenus via la simulation numérique. Lorsque la génération de maillages pour un modèle éléments finis s'effectue à partir d'images médicales provenant de données patients, une des difficultés consiste à estimer l'impact de la qualité du maillage sur la précision du calcul. Il est nécessaire que le maillage satisfasse certaines contraintes géométriques complexes nécessaires pour respecter les détails de l'anatomie. D'autre part, lors des simulations numériques, le maillage doit également satisfaire d'autres exigences géométriques pour une bonne approximation numérique. Il faut donc trouver un bon équilibre entre ces deux aspects : une bonne précision des détails anatomiques qui ne dégradent pas l'approximation numérique.

Afin d'obtenir des estimations *a posteriori* sur des schémas de type Galerkin éléments finis, une approche consiste à utiliser des principes de dualité comme pour les études de problèmes de contrôle optimal (voir [17] pour une approche générale). Le paradigme alors envisagé est la méthode DWR (Dual Weighted Residuals) (voir [56]) qui utilise un argument par dualité pour estimer l'erreur sur la quantité d'intérêt souhaitée. De plus, ces estimateurs *a posteriori* fournissent une stratégie d'adaptation de maillage.

Dans [10], nous présentons des résultats préliminaires dans un cadre simplifié (élasticité linaire) dans lesquels nous analysons la qualité et la performance des estimateurs DWR. Nous présentons des simulations numériques, tout d'abord sur une géométrie artificielle avec une solution explicite et puis sur une géométrie de langue simplifiée. Par exemple, dans la figure 1 (gauche), nous pouvons observer le résultat après quelques étapes d'adaptation sur un maillage de langue provenant de données patients. Les vecteurs d'activation musculaire (figure 1 à droite) sont choisis de sorte à modéliser la prononciation de la lettre "i" et la région d'intérêt est fixée sur le bout de la langue puisque c'est cette zone qui a le plus d'influence sur le son obtenu. Ces estimations sont implémentés à l'aide de la librairie open-source éléments finis FEniCS [13].

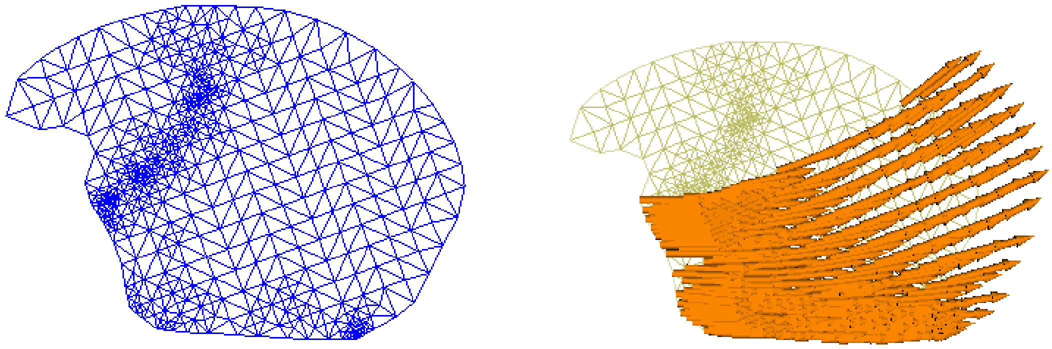

FIGURE 1 – Adaptation de maillage (gauche) et vecteurs d'activation (droite) pour la langue

Cette étude a donné lieu au travail [10] qui est en cours de rédaction et qui a été l'occasion d'une collaboration avec S. Tomar, K. Agathos, S. Bordas, J. Hale (université du Luxembourg), M. Bucki (entreprise Texisense, Grenoble), P.-Y. Rohan (ENSAM, Paris), F. Chouly, A. Lozinski (LMB, Besançon), qui sont issus de mathématiques appliquées, (bio-)mécanique, informatique et biomédical.

*En collaboration avec S. Bordas, S. Tomar (Université du Luxembourg), M. Bucki (entreprise Texisense, Grenoble), P.-Y. Rohan (ENSAM, Paris), F. Chouly, A Lozinski (LMB, Besançon), C. Lobos (Chili).*
*Voir référence [10].*

## 3 Contrôlabilité de systèmes hyperboliques

Je présente dans cette section deux études de contrôlabilité sur des systèmes hyperboliques. Dans la première, nous établissons un résultat de perturbations sur un système abstrait de type *onde*. Nous utilisons par ailleurs ce résultat pour résoudre plusieurs problèmes ouverts. La seconde étude concerne un modèle de type *transport* liés à des problèmes de mouvements de foules.

## 3.1 Perturbation de systèmes contrôlés de type onde

En collaboration avec G. Olive, nous avons obtenu, dans [7], des résultats de perturbations de systèmes contrôlés à l'aide d'une technique appelée *unicité-compacité*. Elle a été introduite dans [55] pour établir la décroissance exponentielle de solutions d'équations hyperboliques et a été utilisée pour la première fois dans [60] afin d'étudier la contrôlabilité d'une équation des plaques. Que ce soit pour montrer la stabilité ou la contrôlabilité d'un système, nous avons besoin d'estimations d'énergie ou d'inégalités d'observabilité. En ce qui concerne un système perturbé, une stratégie habituelle consiste à essayer d'obtenir ces estimations à partir de celles qui correspondent au système initial si celles-ci sont connues. La méthode d'unicité-compacité permet de ramener ce problème à une propriété de continuation unique sur le système perturbé.

Soit $\mathcal{A}_0$ un opérateur générateur d'un $C_0$-semigroupe et $\mathcal{B}$ un opérateur continu. Considérons le système abstrait suivant

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y &= \mathcal{A}y + \mathcal{B}u, \quad t \in (0,T), \\ y(0) &= y^0, \end{cases} \tag{10}$$

où $T > 0$ est le temps de contrôle, $y^0$ la donnée initiale, $y$ l'état et $u$ le contrôle. Supposons que le système (10) soit exactement contrôlable et soit $\mathcal{K}$ un opérateur compact. Nous avons montré dans [7] que le système (10) reste exactement contrôlable si l'on remplace $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}+\mathcal{K}$ sous la condition :

$$\ker(\lambda - \mathcal{A}^* - \mathcal{K}^*) \cap \ker\mathcal{B}^* = \{0\}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

Ce type de résultats de perturbation à l'aide de la méthode d'unicité-compacité est standard, mais n'a jamais été écrit de manière générale. De plus, aucune condition aussi faible que la condition (11) n'a été obtenues auparavant.

Afin de montrer l'efficacité de ce résultat, nous avons résolu dans le même article plusieurs problèmes ouverts à l'aide de celui-ci : premièrement, nous montrons la contrôlabilité d'un système hyperbolique du premier ordre étudié dans [26, 28]. Comme deuxième application, nous étudions un système gouverné par des équations des ondes couplées, contrôlé par un seul contrôle. Nous généralisons les résultats de [45] au cas de couplages qui dépendent de l'espace. Pour cela, nous combinons le critère (11) avec une méthode par contrôle fictif et une technique de résolubilité algébrique. En tant que troisième application, nous considérons un système d'équations de la chaleur couplées avec autant de contrôles que d'équations et une matrice de diffusion non-diagonalisable. Dans ce cas, l'inégalité de Carleman, qui est l'outil habituel pour ce type de problème, ne peut pas être utilisée (Cf [33]). Pour aborder ce problème, nous montrons la contrôlabilité du système des équations des ondes correspondant à l'aide du critère (11) et nous transposons le résultat au cas parabolique grâce à une technique de transmutation introduite dans [47].

*En collaboration avec G. Olive (IMB, Bordeaux).*
*Voir référence [7].*

## 3.2 Contrôlabilité d'équations de transport liées au mouvements de foules

Les mouvements de foules peuvent être modélisés par des systèmes d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$\partial_t \mu + \nabla \cdot ((v + \mathbb{1}_\omega u)\mu) = 0. \tag{12}$$

Ici $\mu$ est une mesure de probabilité représentant la densité de population et $v$ est un champ de vitesses donné. Nous agissons dans le système (12) à l'aide du champ de vitesses $u$ qui opère sur la position des agents sur un ouvert $\omega$ localisé.

L'interaction des agents peut être modélisée par un champ de vitesse $v$ qui dépend de $\mu$ de manière non-locale. Il existe très peu de résultats de contrôle sur les équations de transport avec un champ de vitesses non-local. Ceci vient essentiellement du fait que le premier cadre général pour l'existence et unicité des solutions n'a été obtenu que dans [52] (à l'aide de la *distance de Wasserstein*). Le problème de contrôle (12) a été étudié dernièrement par B. Piccoli, F. Rossi et E. Trélat dans [53]. Dans le modèle particulier dit de Cucker-Smale, ils montrent qu'en agissant sur l'accélération, il est possible d'aligner les vitesses des agents en temps suffisamment long lorsque le domaine de contrôle ne dépasse pas une aire maximale donnée mais peut dépendre du temps.

Lorsque le champ de vitesses $v$ ne dépend pas de la densité de population $\mu$, le système (12) porte le nom d'*équation de continuité*. Dans [11], en collaboration avec M. Morancey et F. Rossi, nous avons étudié les propriétés de contrôle de celle-ci. Nous avons montré que deux aspects sont essentiels.

Le premier est géométrique : schématiquement, il est nécessaire que la foule passe par la zone de contrôle et que la position finale que l'on souhaite obtenir puisse être atteinte en partant de la zone de contrôle. Cette condition est représentée dans la figure 2.

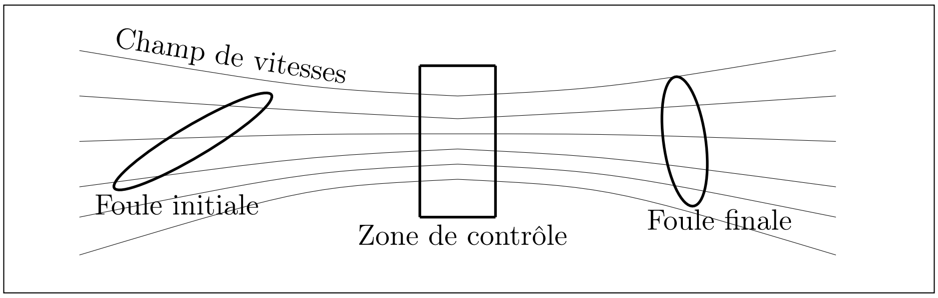


FIGURE 2 – Condition géométrique.

Le deuxième aspect est analytique : une fois le contrôle construit, il faut être certain que celui-ci ne mène pas à deux dispositions différentes, c'est-à-dire que le système est bien posé. Les classes de champs de vitesses pour lesquelles nous savons que le système (12) est bien posé ne permettent pas de regrouper deux foules séparées. Nous ne pouvons donc qu'espérer nous approcher de l'agencement souhaité. Nous avons montré que sous la condition géométrique il est possible de contrôler approximativement à l'aide d'un contrôle $u$ régulier. Nous avons également étudié le cas de la contrôlabilité exacte dans un cadre moins régulier.

Deux travaux d'automatique sont issus de cette étude. Dans [6], nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour amener une mesure sur une autre. Puis, dans [8], nous explicitons le temps minimal et

Un article de mathématiques est en cours de rédaction concernant les aspects analytiques présentés précédemment.

, a été effectuée en collaboration avec F. Rossi (LSIS, Marseille) et M. Morancey (I2M, Marseille) dans le cadre du post-doctorat que j'effectue à l'université d'Aix-Marseille.

Comme je l'explique dans mon programme de recherche l'étape suivante est de considérer un champ de vitesses $v[\mu]$ qui dépend de la solution $\mu$ de façon non-locale afin de tenir compte de l'interaction des agents.

*En collaboration avec F. Rossi (LSIS, Marseille) et M. Morancey (I2M, Marseille)*

*Voir références [8, 6, 11].*

# 8 Bibliographie générale

## Publications


[1] F. Ammar Khodja, F. Chouly, and M. Duprez, *Partial null controllability of parabolic linear systems*, Math. Control Relat. Fields **2** (2016), 185–216.

[2] M. Duprez, *Controllability of a 2x2 parabolic system by one force with space-dependent coupling term of order one*, To appear in Control, Optimisation and Calculus of Variations (COCV) - ESAIM (2016), 25 pages.

[3] M. Duprez and P. Lissy, *Indirect controllability of some linear parabolic systems of m equations with m - 1 controls involving coupling terms of zero or first order*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **106** (2016), 905–934.

[4] M. Duprez and P. Perasso, *Criterion of positivity for semilinear problems with applications in mathematical biology*, Accepted in Positivity (2017).


## Travaux soumis


[5] M. Duprez and P. Lissy, *Positive and negative results on the internal controllability of parabolic equations coupled by zero and first order terms*, Soumis au journal JEE (2016).

[6] M. Duprez, M. Morancey, and F. Rossi, *Controllability and optimal control of the transport equation with a localized vector field*, soumis à 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (2017).

[7] M. Duprez and G. Olive, *Perturbations of controlled systems*, Soumis à Mathematical Control and Related Fields (MCRF) - AIMS (2016).

[8] M. Duprez and F. Rossi, *Time optimal control for continuous mass displacement*, soumis à 56th IEEE Conference on Decision and Control (2017).


## Poster


[9] M. Duprez, *Indirect controllability of some linear parabolic systems coupled by an operator of first order*, Poster à la conférence "Contrôle des EDP et applications", du 4 au 13 novembre 2015 à Marseille.


## Travaux en cours de rédaction


[10] S. P. A. Bordas, M. Bucki, F. Chouly, M. Duprez, C Lobos, A Lozinski, and P.-Y. Rohan, *A preliminary study on some a posteriori error estimates for soft-tissue biomechanic*, In preparation (2017).

[11] M. Duprez, M. Morancey, and F. Rossi, *Controllability of the continuity equation with a localized control*, In preparation (2017).

## Références


[12] N. Alaa, I. Fatmi, J.-R. Roche, and A. Tounsi, *Mathematical analysis for a model of nickel-iron alloy electrodeposition on rotating disk electrode : parabolic case*, International Journal of Mathematics and Statistics **2** (2008), 30–49.

[13] Martin S. Alnæs, Jan Blechta, Johan Hake, August Johansson, Benjamin Kehlet, Anders Logg, Chris Richardson, Johannes Ring, Marie E. Rognes, and Garth N. Wells, *The fenics project version 1.5*, Archive of Numerical Software **3** (2015), no. 100.

[14] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, and M. González-Burgos, *A generalization of the Kalman rank condition for time-dependent coupled linear parabolic systems*, Differ. Equ. Appl. **1** (2009), no. 3, 427–457.

[15] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, and M. González-Burgos, *A Kalman rank condition for the localized distributed controllability of a class of linear parbolic systems*, J. Evol. Equ. **9** (2009), no. 2, 267–291.

[16] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, and L. de Teresa, *New phenomena for the null controllability of parabolic systems : minimal time and geometrical dependence*, J. Math. Anal. Appl. **444** (2016), no. 2, 1071–1113. MR 3535750

[17] R. Becker and R. Rannacher, *An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods*, Acta Numer. **10** (2001), 1–102.

[18] A. Benabdallah, M. Cristofol, P. Gaitan, and L. De Teresa, *Controllability to trajectories for some parabolic systems of three and two equations by one control force*, Math. Control Relat. Fields **4** (2014), no. 1, 17–44.

[19] D. Bothe and D. Hilhorst, *A reaction-diffusion system with fast reversible reaction*, J. Math. Anal. Appl. **286** (2003), no. 1, 125–135.

[20] F. Boyer, *On the penalised HUM approach and its applications to the numerical approximation of null-controls for parabolic problems*, CANUM 2012, 41e Congrès National d'Analyse Numérique, ESAIM Proc., vol. 41, EDP Sci., Les Ulis, 2013, pp. 15–58.

[21] F. Boyer, F. Hubert, and J. Le Rousseau, *Discrete Carleman estimates for elliptic operators and uniform controllability of semi-discretized parabolic equations*, J. Math. Pures Appl. (9) **93** (2010), no. 3, 240–276.

[22] ———, *Discrete Carleman estimates for elliptic operators in arbitrary dimension and applications*, SIAM J. Control Optim. **48** (2010), no. 8, 5357–5397.

[23] ———, *Uniform controllability properties for space/time-discretized parabolic equations*, Numer. Math. **118** (2011), no. 4, 601–661.

[24] F. Boyer and J. Le Rousseau, *Carleman estimates for semi-discrete parabolic operators and application to the controllability of semi-linear semi-discrete parabolic equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **31** (2014), no. 5, 1035–1078.

[25] F. Boyer and G. Olive, *Approximate controllability conditions for some linear 1D parabolic systems with space-dependent coefficients*, Math. Control Relat. Fields **4** (2014), no. 3, 263–287.

[26] F. Bribiesca-Argomedo and M. Krstic, *Backstepping-forwarding control and observation for hyperbolic PDEs with Fredholm integrals*, IEEE Trans. Automat. Control **60** (2015), no. 8, 2145–2160. MR 3382648

[27] S. Chakrabarty and F. B. Hanson, *Distributed parameters deterministic model for treatment of brain tumors using galerkin finite element method*, Math. biosci. **219** (2009), no. 2, 129–141.

[28] J.-M. Coron, L. Hu, and G. Olive, *Stabilization and controllability of first-order integro-differential hyperbolic equations*, J. Funct. Anal. **271** (2016), no. 12, 3554–3587. MR 3558250

[29] J.-M. Coron and P. Lissy, *Local null controllability of the three-dimensional Navier-Stokes system with a distributed control having two vanishing components*, Invent. Math. **198** (2014), no. 3, 833–880.

[30] P. Érdi and J. Tóth, *Mathematical models of chemical reactions*, Nonlinear Science : Theory and Applications, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989, Theory and applications of deterministic and stochastic models.

[31] H. O. Fattorini and D. L. Russell, *Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension*, Arch. Rational Mech. Anal. **43** (1971), 272–292.

[32] ______, *Uniform bounds on biorthogonal functions for real exponentials with an application to the control theory of parabolic equations*, Quart. Appl. Math. **32** (1974/75), 45–69.

[33] E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, and L. de Teresa, *Controllability of linear and semilinear non-diagonalizable parabolic systems*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **21** (2015), no. 4, 1178–1204. MR 3395760

[34] A. V. Fursikov and O. Y. Imanuvilov, *Controllability of evolution equations*, Lecture Notes Series, vol. 34, Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.

[35] R. Glowinski, J.-L. Lions, and J. He, *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 117, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[36] M. González-Burgos and L. de Teresa, *Controllability results for cascade systems of $m$ coupled parabolic PDEs by one control force*, Port. Math. **67** (2010), no. 1, 91–113.

[37] M. Gromov, *Partial differential relations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 9, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[38] S. Guerrero, *Null controllability of some systems of two parabolic equations with one control force*, SIAM J. Control Optim. **46** (2007), no. 2, 379–394.

[39] S. Guerrero and O. Y. Imanuvilov, *Remarks on non controllability of the heat equation with memory*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **19** (2013), no. 1, 288–300.

[40] T. Hillen and K. J. Painter, *A user's guide to PDE models for chemotaxis*, J. Math. Biol. **58** (2009), no. 1-2, 183–217.

[41] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson, et al., *SciPy : Open source scientific tools for Python*, 2001–, [Online ; accessed 2015-09-16].

[42] S. Labbé and E. Trélat, *Uniform controllability of semidiscrete approximations of parabolic control systems*, Systems Control Lett. **55** (2006), no. 7, 597–609.

[43] D Lauffenburger, R Aris, and K Keller, *Effects of cell motility and chemotaxis on microbial population growth.*, Biophysical journal **40** (1982), no. 3, 209.

[44] J.-L. Lions, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Avant propos de P. Lelong, Dunod, Paris, 1968.

[45] P. Lissy and T. Liard, *A kalman rank condition for the indirect controllability of coupled systems of linear operator groups*, Submitted (2016).

[46] Anders Logg and Garth N. Wells, *Dolfin : Automated finite element computing*, ACM Transactions on Mathematical Software **37** (2010), no. 2.

[47] L. Miller, *The control transmutation method and the cost of fast controls*, SIAM J. Control Optim. **45** (2006), no. 2, 762–772 (electronic). MR 2246098

[48] ______, *Boundary approximate controllability of some linear parabolic systems*, Evol. Equ. Control Theory **3** (2014), no. 1, 167–189.

[49] A. Perasso and U. Razafison, *Infection load structured si model with exponential velocity and external source of contamination*, World Congress on Engineering, 2013, pp. 263–267.

[50] ———, *Asymptotic behavior and numerical simulations for an infection load-structured epidemiological model : application to the transmission of prion pathologies*, SIAM J. Appl. Math. **74** (2014), no. 5, 1571–1597. MR 3265189

[51] A. Perasso and Q. Richard, *Implication of age-structuration on the dynamics of lotka volterra equations*, to appear in differential and integral equations (2017).

[52] B. Piccoli and F. Rossi, *Transport equation with nonlocal velocity in Wasserstein spaces : convergence of numerical schemes*, Acta Appl. Math. **124** (2013), 73–105. MR 3029241

[53] ———, *Control to Flocking of the Kinetic Cucker–Smale Model*, SIAM J. Math. Anal. **47** (2015), no. 6, 4685–4719. MR 3432849

[54] M. Pierre, *Global existence in reaction-diffusion systems with control of mass : a survey*, Milan J. Math. **78** (2010), no. 2, 417–455. MR 2781847 (2012d :35160)

[55] J. Rauch and M. Taylor, *Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domains*, Indiana Univ. Math. J. **24** (1974), 79–86. MR 0361461

[56] M. Rognes and A. Logg, *Automated goal-oriented error control i : Stationary variational problems*, SIAM Journal on Scientific Computing **35** (2013), no. 3, C173–C193.

[57] N. Shigesada, K. Kawasaki, and E. Teramoto, *Spatial segregation of interacting species*, Journal of Theoretical Biology **79** (1979), no. 1, 83–99.

[58] H. L. Smith and P. Waltman, *The theory of the chemostat*, Cambridge Studies in Mathematical Biology, vol. 13, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, Dynamics of microbial competition. MR 1315301 (96e :92016)

[59] A. M. Turing, *The chemical basis of morphogenesis*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London B : Biological Sciences **237** (1952), no. 641, 37–72.

[60] E. Zuazua, *Contrôlabilité exacte d'un modèle de plaques vibrantes en un temps arbitrairement petit*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **304** (1987), no. 7, 173–176. MR 880573