M. Duprez

TD 1 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Exercice 1 :

1. Ecrire la liste complète des diviseurs positifs de 36, de 59, et de 60.
2. En déduire les $pgcd(36, 59)$, $pgcd(36, 60)$, $pgcd(59, 60)$, $pgcd(36, 59, 60)$.
3. Ecrire les nombres 36, 59, et 60 sous forme de produit de nombres premiers.

Exercice 2 : Montrer que les trois entiers 6, 10, et 15 sont premiers entre eux et ne sont pas premiers deux à deux.

Algorithme d'Euclide *pour le calcul du pgcd de deux entiers a_1 et a_2 tels que*

$$a_1 \geq a_2 > 0$$

.

Première étape : par division euclidienne on obtient $a_1 = a_2 q_1 + a_3$ avec $q_1 \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq a_3 < a_2$. Si $a_3 = 0$ alors $a_2 = pgcd(a_1, a_2)$, sinon on passe à l'étape suivante.

Deuxième étape : par division euclidienne on obtient $a_2 = a_3 q_2 + a_4$ avec $q_2 \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq a_4 < a_3$. Si $a_4 = 0$ alors $a_3 = pgcd(a_1, a_2)$, sinon on passe à l'étape suivante.

Troisième étape : ...

Exercice 3 :

1. Calculer le *pgcd* de 8 et 15, et l'exprimer comme combinaison linéaire entière de ces deux nombres.
2. Même questions pour 1769 et 2378.

Exercice 4 :

1. Trouver $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $22x + 6y = 2$.
2. Même question pour $2011x + 24y = 1$.

Exercice 5 : Trouver les entiers $a \in \mathbb{Z}$ tels que l'équation $1024x + 52y = a$ possède une solution $x, y \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6 : Considérons les *nombres de Fibonacci* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définis récursivement par

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1},\ n \geq 2.$$

1. Calculer f_2, f_3, f_4 et f_5.
2. Montrer que deux nombres de Fibonacci successifs f_n et f_{n+1}, $n \geq 2$, sont premiers entre eux.

Exercice 7 :

1. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers premiers entre eux et $c \in \mathbb{Z}$. Si a divise bc alors a divise c.
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et p un nombre premier. Si p divise ab alors p divise a ou p divise b.

Exercice 8 : *Un nombre entier n est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts (c'est-à-dire à la somme des entiers d tels que $1 \leq d < n$ et $d \,|\, n$). Vérifier que 6, 28, 496 sont parfaits.*