M. Duprez

TD 2 : Relations d'ordre et d'équivalence

Relation $\mathcal{R}$: *$\mathcal{R}$ est réflexive si $x\mathcal{R}x$;*
$\mathcal{R}$ est symétrique si $x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$;
$\mathcal{R}$ est antisymétrique si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y$;
$\mathcal{R}$ est transitive si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z$.

Exercice 1 : Compléter le tableau suivant en indiquant OUI ou NON dans les cases qui conviennent.

ensemble	relation	réflexive	symétrique	antisymétrique	transitive
$\mathbb{R}$	$=$				
$\mathbb{R}$	$\leq$				
$\mathbb{R}$	$\geq$				
$\mathbb{R}$	$<$				
$\mathbb{R}$	$\neq$				
$\mathbb{R}$	$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 1$				
$\mathbb{N}$	division $p\|q$				
$\mathbb{C}$	$z\mathcal{R}z' \Longleftrightarrow \|z\| = \|z'\|$				
$\mathbb{N}$	$p\mathcal{R}q \Longleftrightarrow p + q = 0$				
{droites du plan}	$\parallel$				
{droites du plan}	$\perp$				
$\mathbb{R}^2$	$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases}$				

Exercice 2 :

1. Quelles relations du tableau précédent peut-on appeler des relations d'ordre ?
2. Quelles relations du tableau précédent peut-on appeler des relations d'équivalence ?

Exercice 3 : On pose $I = [0; 2[$ et on munit I de la relation d'ordre $\leq$.

1. Est-ce que I admet un majorant ? une borne supérieure ? un plus grand élément ?
2. Montrer que I a un plus petit élément.

Exercice 4 : Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{N}$, on pose

$$p\mathcal{R}q \iff 2 \,|\, p - q.$$

1. La relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? symétrique ? antisymétrique ? transitive ?
2. La relation $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre ou relation d'équivalence ?

Exercice 5 : On définit la relation $|$ sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{N}$:

$$p \,|\, q \iff (\exists k \in \mathbb{N}, q = pk).$$

1. Montrer que $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. Est-ce un ordre total ?
2. Montrer que $\mathbb{N}$ muni de cet ordre admet un plus petit élément et un plus grand élément. Comparer ces résultats à ce que l'on a dans $\mathbb{N}$ muni de l'ordre naturel $\leq$.

Exercice 6 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on pose

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Donner la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$ quelconque.

Exercice 7 : Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide. On note $\mathbb{R}^E$ l'ensemble des fonctions définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f, g \in \mathbb{R}^E$ on pose

$$f \leq g \iff f(x) \leq g(x),\ \forall x \in E.$$

1. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^E$. Est-ce un ordre total ?
2. On prend deux éléments $f, g \in \mathbb{R}^E$ et on note $A = \{f; g\}$. Montrer que $|f| + |g|$ est un majorant de A. Proposer un minorant de A.