TD 3 : Groupes

Groupe $(G, *)$ **:** *associativité : $(x * y) * z = x * (y * z)$, pour tout $x, y, z \in G$;*
élément neutre : $e * x = x * e = x$, pour tout $x \in G$;
élément inverse : $x' * x = x * x' = e$, pour tout $x \in G$.

Exercice 1 : On note α le nombre complexe $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et on note $G = \{1; i; \alpha; i\alpha; -1; -i; -\alpha; -i\alpha\}$.

1. Calculer α^2 sous forme algébrique.
2. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe et dresser sa table.

Exercice 2 : On considère les quatre applications suivantes, définies de $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f_0 : x \mapsto x,\ f_1 : x \mapsto -x,\ f_2 : x \mapsto \frac{1}{x},\ f_3 : x \mapsto -\frac{1}{x}.$$

Soit G l'ensemble $\{f_0, ; f_1; f_2; f_3\}$. On note $\circ$ la composition des applications.

1. Écrire la table de composition deux à deux des éléments de G.
2. En déduire que $(G, \circ)$ est un groupe abélien.

Exercice 3 : On pose $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Montrer que $(\mathbb{S}^1, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, \times)$. Est-il d'ordre fini ?

Exercice 4 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $n\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples de n, $n\mathbb{Z} = \{kn, k \in \mathbb{Z}\}$.

1. Préciser ce qu'est $n\mathbb{Z}$ lorsque n vaut 0, 1 et 2.
2. Montrer que $(n\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si p et q sont deux entiers, on note $p\mathcal{R}q$ si, et seulement si, $p - q \in n\mathbb{Z}$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 5 : Soit G l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour tous $x, y \in G$, on note :

$$x \top y = x + y - xy.$$

1. Montrer que G, muni de la loi $\top$, est un groupe.
2. Ce groupe est-il abélien ? Justifier.

Exercice 6 : Pour tout $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, on note $\sigma(n) = 6 - n$.

1. Vérifier que σ est un élément de S_5 et l'écrire sous forme de tableau.
2. Calculer σ^2 et σ^{-1}.
3. Quelle est la signature de σ ?

Exercice 7 :

1. Combien d'éléments y a-t-il dans S_5 ?
2. Dans S_5, donner deux cycles de longueur 4, deux cycles de longueur 3 et trois transpositions. Existe-t-il des cycles de longueur 5 dans S_5 ?
3. Calculer s^7 et t^{123}, où s et t sont les deux éléments de S_5 suivants :

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 : Dans S_8, on note σ la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 7 & 4 & 8 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Que vaut $\sigma(2)$? $\sigma(7)$?
2. Calculer les images des permutations σ et σ^2.
3. Décomposer σ en produit de cycles à supports deux à deux disjoints.

Exercice 9 : Décomposer les permutations suivantes en produits de transposition, et en déduire leur signature :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 : Soient σ et τ les permutations suivantes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer σ et τ en produit de cycles à supports deux à deux disjoints.
2. En déduire l'ordre et la signature de ces deux permutations.
3. Calculer σ^{34} et τ^{2013}.