TD 4 : Anneaux

Rappels :

- $n\mathbb{Z} = \{nk,\ k \in \mathbb{Z}\}$**,** $n \in \mathbb{Z}$**.**
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0]_n,\ [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}$; $[k]_n$ est la classe d'équivalence de $k \in \mathbb{Z}$ pour la relation d'équivalence :

$$x\mathcal{R}_n y \quad \Longleftrightarrow \quad n|x-y \quad \Longleftrightarrow \quad x \equiv y \pmod{n}.$$

Exercice 1 : Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Quelle est la structure de $a\mathbb{Z}$?
2. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$? des idéaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$?
$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}, \quad a\mathbb{Z} \cup b\mathbb{Z}, \quad a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}.$$
3. Comment appelle-t-on les entiers d et m tels que
$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}, \quad a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} \ ?$$

Exercice 2 : Considérons $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +, \times)$.

1. Donner deux éléments appartenant à $[3]_5$, puis deux éléments appartenant $[12]_5$.
2. Montrer que $[4]_5 = [9]_5$.
3. Quelle est la structure de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +, \times)$?
4. Remplir les tables (de Cayley) suivantes :

$+$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$	inverse
$[0]_5$						
$[1]_5$						
$[2]_5$						
$[3]_5$						
$[4]_5$						

$\times$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$	inverse
$[0]_5$						
$[1]_5$						
$[2]_5$						
$[3]_5$						
$[4]_5$						

Exercice 3 : Considérons $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$.

1. Calculer
$$[12]_6 + [22]_6, \quad [12]_6 \times [22]_6, \quad ([12]_6)^4.$$
2. Quelle est la structure de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$?
3. Donner, lorsqu'il existe, l'inverse de chaque élément pour les deux lois.

Exercice 4 : Déterminer l'inverse de :
$$[56]_{75}, \quad [10]_{13}, \quad [75]_{13}.$$

Exercice 5 : En utilisant les congruences, répondre aux questions suivantes :

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{18} par 7 ?
2. Quel est le reste de la division euclidienne de 114^{2015} par 5 ?
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, quel est le reste de la division euclidienne de 5^n par 12 ?
4. L'entier $5n^3 + n$ est-il divisible par 6 pour tout $n \in \mathbb{N}$?
5. L'entier $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est-il divisible par 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Vérifier que $n^2 \equiv 0 \pmod 4$ si n est pair et $n^2 \equiv 1 \pmod 4$ si n est impair.
2. Montrer que $n^3 \equiv -1, 0$ ou $1 \pmod 9$.

Exercice 7 : Montrer que pour tout entier n on a :
$$3^{n+3} - 4^{4n+2} \equiv 0 \pmod{11}, \quad 16^{6n+1} - 3^{3n+1} \equiv 0 \pmod{13}, \quad 16^{2n+1} + 18^n \equiv 0 \pmod{17}.$$

Exercice 8 :

1. Trouver les entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que $x \equiv 1 \pmod 7$ et $x \equiv 12 \pmod{10}$.
2. Trouver les entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que $x \equiv 9 \pmod{17}$ et $x \equiv 17 \pmod{60}$.