TD1 : Fonctions réelles d'une ou de plusieurs variables réelles

Exercice 1 :

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \\
f_2(x) &= \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \\
f_3(x) &= \begin{cases} x^2\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \\
f_4(x) &= \begin{cases} x(1-\ln x) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \\
f_5(x) &= \begin{cases} (x-1)e^{-\frac{1}{x-1}} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3} & \text{si } x < 1 \end{cases} \\
f_6(x) &= \begin{cases} \dfrac{\sin x - \cos x}{x-\frac{\pi}{4}} & \text{si } x > \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2}(4x-\pi+1) & \text{si } x \leqslant \frac{\pi}{4} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2 - x + \ln x$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β.
2. Montrer que $\frac{1}{10} < \alpha < \frac{1}{2}$ et $3 < \beta < 4$.
3. A-t-on $3 < \beta < 3.5$ ou $3.5 < \beta < 4$?
4. En utilisant la même procédure que précédemment, trouver une valeur approchée de β à $\frac{1}{16}$ près.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Soit la fonction $h(x) = x - \frac{f(x)}{\frac{df(x)}{dx}}$.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ à une unique solution réelle a.
3. Montrer que $-2 < a < 0$.

4. On pose $x_1 = h(0)$, $x_2 = h(x_1)$ et $x_3 = h(x_2)$. Calculer x_3.
5. Représenter graphiquement la fonction f pour $x \in [-2, 0]$, ainsi que la construction géométrique des points $x_1,\ x_2$ et x_3.

Exercice 4 :

Représenter dans le plan les domaines suivants :

— $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x-1, y-2)\|_2 \leqslant 2\}$ avec
$$\|(X,Y)\|_2 := \sqrt{X^2 + Y^2}$$

— $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y-1)\|_1 = 1\}$ avec
$$\|(X,Y)\|_1 := |X| + |Y|$$

— $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x+1, y-1)\|_\infty \geqslant 1\}$ avec
$$\|(X,Y)\|_\infty := \max(|X|, |Y|)$$

Exercice 5 :

Soit $a, b > 0$. Montrer que l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $\|(x,y)\|_{(a,b)} = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 :

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x-y, x+y)$. Représenter dans le plan les solutions des équations :

1. $\|f(x,y)\|_1 = 1$.
2. $\|f(x,y)\|_2 = 1$.
3. $\|f(x,y)\|_\infty = 1$.

Exercice 7 :

Étudier la continuité des fonctions suivantes :
$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= |x| \\
f_2(x,y) &= \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 1 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases} \\
f_3(x,y) &= \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$