TD2 : Dérivation de fonctions & équations différentielles

Exercice 1 :

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lcllcl}
f_1(x) & = & \ln^5 x & f_9(x) & = & \sqrt{2+\tan x} \\
f_2(x) & = & \ln x^2 & f_{10}(x) & = & e^{\sqrt{x+2}} \\
f_3(x) & = & \ln(5x) & f_{11}(x) & = & 2^x \\
f_4(x) & = & \sqrt[3]{(x^2-x+3)^2} & f_{12}(x) & = & \ln(x^4+3) \\
f_5(x) & = & e^{\frac{x^3}{2}} & f_{13}(x) & = & \sin^n(x)\cos^p(x) \quad n,p\in\mathbb{N}^* \\
f_6(x) & = & \sqrt{e^{4x}} & f_{14}(x) & = & \sqrt{1+x^2\sin^2 x} \\
f_7(x) & = & e^{\sqrt{3+\cos x}} & f_{15}(x) & = & \dfrac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1} \\
f_8(x) & = & \ln(1+\sin x) & f_{16}(x) & = & \sqrt{\dfrac{1+\sin(\sqrt{x})}{1-\sin(\sqrt{x})}}
\end{array}$$

Exercice 2 :

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lcllcl}
F_1(x) & = & e^{f(x)} & F_3(x) & = & \ln|f(x)| \\
F^2(x) & = & \sin(f(x)^2) & F_4(x) & = & f(\ln|f(x)|)
\end{array}$$

Exercice 3 :

Déterminer le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 des fonctions suivants :

$$\begin{array}{lclllcll}
f_1(x) & = & \ln(1-x^3) & n=6; & f_5(x) & = & \dfrac{e^{1+x}-e}{x} & n=7; \\
f_2(x) & = & \sqrt{1-x} & n=3; & f_6(x) & = & \sqrt{9+x}\ln(1+3x) & n=3; \\
f_3(x) & = & \ln(2-x+x^2) & n=3; & f_7(x) & = & \dfrac{1+x}{1+\ln(1+x)} & n=5; \\
f_4(x) & = & e^{x^2-x} & n=4; & f_8(x) & = & \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) & n=4;
\end{array}$$

Exercice 4 :

1. Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction définie par $f(x)=\ln(1+x^2)$.

2. En déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la dérivée de f.
3. Calculer la limite
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x^2)}\right).$$

Exercice 5 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{llll}
2x+yy'=0 & y(1)=1; & (4-x^2)yy'=2(1+y^2) & y(1)=0;\\
y'=\dfrac{1-y}{1-2x} & y(0)=0; & (1-x^2)y'+y=1 & y(2)=0;\\
(1+y)y'=4x^3 & y(0)=0; & xy'+y=x & y(2)=0;
\end{array}$$

Exercice 6 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y''+y=x^2-1$ (on cherchera une solution particulière sous la forme d'un trinôme).
2. $2y''+y'-y=3\cos(2x)-\sin(2x)$
   (on cherchera une solution particulière sous la forme $a\cos(2x)+b\sin(2x)$).
3. $y''-4y=13\cos(3x)$
   (on cherchera une solution particulière sous la forme $a\cos(3x)+b\sin(3x)$).
4. $y''-6y'+9y=e^{3x}$ (on cherchera une solution sous la forme $g(x)e^{3x}$).

Exercice 7 :

Calculer les dérivées partielles du premier ordre des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll}
f_1(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}; & f_5(x,y)=\sqrt{x^2-y^2};\\
f_2(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}); & f_6(x,y)=\ln(x+y^2);\\
f_3(x,y)=(x^2+y^2)e^{-xy}; & f_7(x,y)=e^{\frac{y}{x}};\\
f_4(x,y)=x^2+2xy^2+y^3; & f_8(x,y)=x^2e^{-yz};
\end{array}$$

Exercice 8 :

Soit la fonction définie par $f(x,y)=x+y+\sqrt{1-x^2-y^2}$. Déterminer son ensemble de définition et son ensemble de dérivabilité. Calculer les dérivées partielles du premier et du second ordre de f. En déduire la formule de Taylor de f à l'ordre 2 au point $(0,0)$.