

TD4 : Nombres complexes

Exercice 1 :

Calculer les quantités suivantes :

(a) $(5 + i) - (7 - 4i)$

(c) $\overline{(1 + i)(7 - 2i)}$

(b) $(4 - i)(2 + 3i)$

(d) $\overline{1 + i + (10 - \sqrt{2}i)(5 + \sqrt{2}i)}$

Exercice 2 :

Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\frac{4 + 3i}{-7 + 5i}$

(b) $\frac{25 + 2i}{3 + 3i}$

(c) $\frac{2 - 4i}{5 + i}$

Exercice 3 :

Pour chaque nombre complexe suivant, donner le module et l'argument, les écrire sous forme exponentielle $\rho e^{i\theta}$, et les représenter sur le plan :

(a) $z_1 = 3 + 3i$

(e) $z_5 = -3i$

(b) $z_2 = 4$

(f) $z_6 = -1$

(c) $z_3 = 2i$

(g) $z_7 = -2 + 2i$

(d) $z_4 = \sqrt{3} - i$

(h) $z_8 = 1 - \sqrt{3}i$

Exercice 4 :

1. Démontrer les deux égalités suivante :

(a) $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$

(b) $\sin(\theta) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

2. En déduire les formules pour $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

3. Donner une expression pour $\cos(3\theta)$.

Exercice 5 :

Tracer dans le plan la courbe d'équation :

$$z\bar{z} - (2 + i)z - (2 - i)\bar{z} = -1,$$

pour $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 6 :

Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{C} :

(a) $z^3 - 1 = 0$

(c) $z^2 + 2z + 10 = 0$

(b) $z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = 0$

(d) $z^4 - 2 = 0$