

TD5 : Equations différentielles

Exercice 1 : Équations linéaires homogènes du 1^{er} ordre

Trouver la solution des problèmes de Cauchy suivants :

$$(a) \begin{cases} \frac{dy}{dx} + 4y = 0, \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} (1 + x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x\frac{dy}{dx} + (1 + x)y = 0, \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = 0, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Exercice 2 : Équations linéaires non-homogènes du 1^{er} ordre

Trouver la solution des problèmes de Cauchy suivants :

$$(a) \begin{cases} x\frac{dy}{dx} + y = x, \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \frac{dy}{dx} - 2y = \frac{-2}{1+e^{-2x}}, \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \frac{dy}{dx} + y = xe^{-x}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x\frac{dy}{dx} - 2y = x^4, \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Exercice 3 : Équations différentielles à variables séparées

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(a) \begin{cases} 2x + yy' = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} y' = \frac{1-y}{1-2x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} (4 - x^2)yy' = 2(1 + y^2) \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} (1 + y)y' = 4x^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 4 : Équations linéaires homogènes du 2^{ème} ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y = 0$
2. $2y'' + y' - y = 0$
3. $y'' - 4y = 0$
4. $y'' - 6y' + 9y = 0$

Exercice 5 : Équations linéaires non-homogènes du 2^{ème} ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y = x^2 - 1$ (on cherchera une solution particulière sous la forme d'un trinôme).
2. $2y'' + y' - y = 3 \cos(2x) - \sin(2x)$
(on cherchera une solution particulière sous la forme $a \cos(2x) + b \sin(2x)$).
3. $y'' - 4y = 13 \cos(3x)$
(on cherchera une solution particulière sous la forme $a \cos(3x) + b \sin(3x)$).
4. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ (on cherchera une solution sous la forme $g(x)e^{3x}$).

Exercice 6 : Un peu de physique : chute d'un corps avec résistance de l'air

Soit un corps en chute libre verticale, de masse m , soumis uniquement à la force de la pesanteur $F = mg$ et à une force de résistance à l'air proportionnelle à la vitesse (de constante de proportionnalité k). Nous rappelons la deuxième loi de Newton : l'accélération subie par ce corps dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit divisée par sa masse.

1. Établir l'équation différentielle du premier ordre qui porte sur la vitesse v du corps.
Cette équation est-elle homogène ou non ?
2. Résoudre cette équation et trouver l'expression de la vitesse v en fonction du temps.
3. Interpréter physiquement le résultat.