M. Duprez
J.M. Crolet

TD6 : Méthode d'Euler Explicite.

Exercice 1 : Résolution numérique : la méthode d'Euler Explicite.
Le but de cet exercice est de montrer comment résoudre de manière approchée une équation différentielle. On étudie d'abord la méthode dans un cadre général, puis on l'appliquera ensuite pour résoudre un problème en biologie.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in (0, T), \\ y(0) = y0, \end{cases} \tag{1}$$

avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On se propose de résoudre numériquement (autrement dit, par ordinateur et de façon approchée) le problème (1) sur $(0, T)$. On considère pour cela un pas de temps discret $\tau = T/N > 0$, avec $N \in \mathbb{N}^*$ et on subdivise $(0, T)$ en N intervalles :

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T, t_n = \tau n, \forall n \in \{0, ..., N\}.$$

L'idée est de calculer une suite de valeurs $y_n \in \mathbb{R}^2$, $n \in \{0, ..., N\}$, qui vont approcher la solution de (1) au temps t_n :

$$y_n' \simeq y(t_n).$$

1. A l'aide d'un développement limité de Taylor, montrer qu'on peut approximer la dérivée $y'(t_n)$ à l'aide de $y(t_n)$, $y(t_{n+1})$ et τ. Quelle est l'erreur d'approximation ?
2. Montrer ensuite qu'on peut calculer de manière approchée la solution de (1) à l'aide de la formule de récurrence :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \tau f(t_n, y_n), \quad n \in \{0, ..., N-1\}, \\ y^0 = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

   Ce schéma est connu sous le nom d' Euler Explicite. Écrire le programme Matlab^{TM} correspondant à ce schéma.
3. Montrer ensuite qu'on peut reformuler (1) comme suit :

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds.$$

   En utilisant cette formule et une des formules d'intégration numérique que vous connaissez, montrer qu'on retrouve (2).
4. Pour se fixer les idées, on va s'intéresser dans cette partie au problème plus simple :

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t), \quad t \in (0, T), \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{3}$$

   où $\alpha \in \mathbb{R}^2$, $\alpha < 0$.

   (a) Vérifier que l'équation ci-dessus (3) est bien un cas particulier de (1). Donner la solution explicite $y(t)$ et vérifier qu'elle est décroissante.

(b) Comment s'écrit (2) dans ce cas-ci ?

(c) Pour $\alpha = 1$, calculer les 5 premières valeurs exactes $y(t_n)$ et approchées y_n en utilisant le schéma d'Euler explicite (2) pour les valeurs suivantes du pas de temps : $\tau = 0.1$ et $\tau = 10$. Commentez.

(d) Seriez-vous capables de donner une condition sur τ pour que le schéma se comporte "correctement" ?

5. On considère maintenant une population de bactéries en milieu fermé, dans lequel seulement M individus peuvent coexister au maximum. On suppose que le nombre initial d'individus est très petit : $y0 << M$. On suppose également que les bactéries se reproduisent avec un taux positif constant C. Alors on peut modéliser la croissance des bactéries à l'aide de l'équation différentielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = Cy(1 - y/M), \quad t \in (0, T), \\ y(0) = y_0. \end{array} \right.$$

Dans cette équation, $y(t)$ représente le nombre de bactéries au temps t : si la population est faible, la vitesse de croissance est approximativement linéaire, et le terme $(1 - y/M)$ permet de réduire la croissance dès qu'on approche de la valeur seuil M. A l'aide du schéma d'Euler Explicite et de Matlab^{TM}, simuler l'évolution de la population au cours du temps en jouant sur les paramètres y_0, M et C.