M. Duprez
J.M. Crolet

TD3 : Schémas d'évolutions

Considérons le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - k\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), & (x,t) \in]0,1[\times[0,T], \\ u(0,t) = 0, & t \in [0,T], \\ u(0,t) = 1, & t \in [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in]0,1[. \end{array}\right.$$

Discrétisation en espace :

On choisit N subdivisions de l'intervalle $[0,1]$ et on pose $h = \frac{1}{N}$ le pas de discrétisation en espace (ou pas d'espace). Le maillage en espace est alors défini par $x_i = ih$ pour $0 \leqslant i \leqslant N$.

Discrétisation en temps :

On choisit P subdivisions de l'intervalle $[0,T]$, $P \in \mathbb{N}^*$, et on pose $\Delta t = \frac{T}{P}$, pas de discrétisation en temps (ou pas de temps). Le maillage en temps est alors défini par $t_n = n\Delta t$ pour $0 \leqslant n \leqslant P$.

Maillage :

Le maillage est constitué de la "grille" $((x_i, t^n))_{0\leqslant i\leqslant N,\ 0\leqslant n\leqslant P}$.

Construction du schéma :

On se donne

$$U^0 = \begin{pmatrix} u_0^0 \\ \vdots \\ u_N^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}$$

et on cherche pour tout $1 \leqslant n \leqslant P$ le vecteur

$$U^n = \begin{pmatrix} u_0^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Schéma d'Euler explicite :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - k\dfrac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} = f_i^n, & 1 \leqslant i \leqslant N-1,\ 1 \leqslant n \leqslant P, \\ u_0^n = 0,\ u_N^n = 1, & 1 \leqslant n \leqslant P, \\ u_i^0 = u_0(x_i), & 1 \leqslant i \leqslant N-1. \end{array}\right.$$

Schéma d'Euler implicite :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - k\dfrac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2} = f_i^{n+1}, & 1 \leqslant i \leqslant N-1,\ 1 \leqslant n \leqslant P, \\ u_0^n = 0,\ u_N^n = 1, & 1 \leqslant n \leqslant P, \\ u_i^0 = u_0(x_i), & 1 \leqslant i \leqslant N-1. \end{array}\right.$$

Schéma de Crank-Nicolson :

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} - \dfrac{k}{2}\left[\dfrac{u_{i-1}^n-2u_i^n+u_{i+1}^n}{h^2}+\dfrac{u_{i-1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i+1}^{n+1}}{h^2}\right] = \frac{1}{2}\left[f_i^n+f_i^{n+1}\right], & 1\leqslant i\leqslant N-1,\ 1\leqslant n\leqslant P, \\ u_0^n=0,\ u_N^n=1, & 1\leqslant n\leqslant P, \\ u_i^0=u_0(x_i), & 1\leqslant i\leqslant N-1. \end{cases}$$

Exercice 1 :

Réécrire chacun des trois schémas ci-dessus sous forme matricielle, c'est-à-dire sous la forme :

$$\begin{cases} U^{n+1}=A\times U^n+B\times F^n,\ 0\leqslant n\leqslant P-1, \\ U^0\in\mathbb{R}^{N+1}. \end{cases}$$

Exercice 2 :

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - k\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + g\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x,t), & (t,x)\in[0,1]\times[0,T], \\ u(0,t)=0, & t\in[0,T], \\ u(0,t)=1, & t\in[0,T], \\ u(x,0)=u_0(x), & x\in[0,1]. \end{cases}$$

Donner les schémas Euler explicite, Euler implicite et de Crank-Nicolson pour ce système, puis les réécrire sous forme matricielle.

Exercice 3 :

Soit $\Omega:=]0,1[\times]0,1[$, $T>0$ et considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} - k\Delta u(x,y,t)=0, & (t,x,y)\in\Omega\times[0,T] \\ u=0, & \text{sur } \partial\Omega\times[0,T] \\ u(x,y,0)=u_0(x,y), & (x,y)\in\Omega. \end{cases}$$

On appelle approximation du Laplacien à 5 points

$$\frac{1}{h}(4u_{i,j}-u_{i+1,j}-u_{i-1,j}-u_{i,j+1}-u_{i,j+1}).$$

Mêmes questions que précédemment.