M. Duprez

TP2 : Minimisation d'applications quadratiques sous contraintes

Le but des exercices de cette feuille est d'apprendre à utiliser les fonctions de **scilab** pour l'optimisation quadratique (`qpsolve`) et l'optimisation générale (`optim`). On commencera par une lecture des articles d'aide sur ces deux fonctions. Ensuite, on essayera de résoudre numériquement les exercices tirés de la feuille de TD 2 (reproduits ci-dessous) à l'aide de **scilab** en choisissant dans chaque cas la fonction appropriée.

Dans les cas où on sera obligé d'utiliser la fonction d'optimisation générale (`optim`), il faudra d'abord reformuler le problème. En effet, cette fonction ne fait que l'optimisation sans contraintes ou celle sous contraintes du type $a_i \leq x_i \leq b_i$.

Par exemple, pour passer d'un problème d'optimisation sous contraintes égalité

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n: g_1(x)=0,\ldots,g_m(x)=0} f(x) \tag{1}$$

on pourra introduire la fonction

$$F_\mu(x) = f(x) + \mu \sum_{i=1}^{m} g_i(x)^2$$

avec un paramètre $\mu > 0$ très grand et considérer le problème de minimisation sans contraintes (dit le problème pénalisé)

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} F_\mu(x). \tag{2}$$

On voit qu'un minimum $\bar{x}_\mu$ dans le problème (2) devra être très proche à un minimum $\bar{x}$ dans le problème original (1).

Dans le cas d'un problème d'optimisation sous contraintes inégalité

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n: g_1(x)\leq 0,\ldots,g_m(x)\leq 0} f(x)$$

on pourra introduire des nouvelles variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$ et reformuler le problème de manière suivante

$$\min_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{R}^m: \\ g_1(x)=t_1,\ldots,g_m(x)=t_m \\ t_1\leq 0,\ldots,t_m\leq 0}} f(x).$$

Ce dernier problème ne contient que les contrainte ionégalité du type traitée par la fonction `optim` et les contraintes égalités qu'on peut traiter par la pénalisation.

Exercice 1 : Minimiser :

$$g(x,y) = 20x + 10y + 3x^2 + 2y^2$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 6 \\ x + y &\leq 10 \\ 2x + 3y &\geq 8 \\ x &\geq 0, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

Exercice 2 : On considère l'ellipse en $\mathbb{R}^3$ formé par l'intersection du plan $x + y + 2z = 2$ et du paraboloïde $z = x^2 + y^2$. Trouver le point sur cet ellipse qui est le plus proche à l'origine.

Exercice 3 : Maximiser

$$h(x,y) = 8x + 4y - x^2 - y^2$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 4 \\ x &\geq 0, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

Exercice 4 : Maximiser et minimiser :

$$f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} |x + y| &\leq 1\,, \\ |x - y| &\leq 1\,, \\ y &\geq 0\,. \end{aligned}$$