TP4 : Méthode de Newton locale

Exercice 1 : (algorithme de Newton dans l'optimisation sans contraintes)

On cherche toujours à minimiser une fonction donnée $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et on propose l'algorithme suivant (qui est en effet une adaptation de l'algorithme de Newton bien connu pour résoudre un système d'équation non-linéaires) de l'exercice précédent comme suit : pour construire x_{i+1}, on part tojours de x_i dans la direction opposée au gradient de f, mais on cherche maintenant à minimiser f dans cette direction. Ainsi on obtient les points $x^0, x^1, \ldots$ tels que $f(x^0) > f(x^1) > \cdots$

Algorithme 1 : Newton

Entrées : $x^0 \in \mathbb{R}^n$, et la tolérance $tol > 0$
pour $i = 0, 1, \ldots$ **faire**
  On résout le système d'équation linéaire suivant pour $d^i \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla^2 f(x^i) d^i = -\nabla f(x^i)$$

  On pose

$$x^{i+1} = x^i + d^i$$

  si $||\nabla f(x^{i+1})|| \leq tol$ **alors**
    poser $x_{\min} = x^{i+1}$, $f_{\min} = f(x_{\min})$ et sortir de la boucle
  fin
fin
Sorties : $x_{\min}$, $f_{\min}$

1. Implémentez l'algorithme sous **scilab**.
2. Testez l'algorithme sur les exemples de la feuille TP précédente.
3. Comparer la vitesses de convergence (le nombre d'itérations nécessaire pour aboutir à une bonne approximation du minimum) avec celle des algorithmes du gradient.

Exercices bonus

Exercice 2 : Un industriel veut fabriquer un alliage dont la composition est 30% de cuivre, 30% de zinc et 40% de fer. Il trouve sur le marché 9 sortes d'alliages dont les compositions et les prix sont donnés par le tableau suivant

Alliage	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cuivre (%)	10	10	40	60	30	30	30	50	20
Zinc (%)	10	30	50	30	30	40	20	40	30
Fer (%)	80	60	10	10	40	30	50	10	50
Coût au kg (euros)	4	5	6	6	8	8	7	6	7

Sachant que le coût de l'opération de mélange est indépendant des alliages utilisés, l'industriel se demande quels alliages il doit acheter et dans quelles proportions pour minimiser son coût de production. Pouvez-vous l'aider ?

Exercice 3 : Minimiser la fonction

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ f(x,y,z) \quad &= \quad x^2 - xy + 2y^2 + 3z^2 - x - 2y - 3z \end{aligned}$$

sous les contraintes :

$$\max(|x|, |y|, |x+y+z|) \leq 1$$

Exercice 4 :

1. Trouver le polynôme de degré 4 qui approche au mieux la fonction
$$f(x) = \frac{\sin x}{1+x}$$
au sens des moindres carrés sur l'intervalle $]0, \pi[$.
<u>Astuces</u> : Il faut voir cela comme un problème de minimisation quadratique
$$\min_{p \in \mathbb{R}^5} \int_0^\pi (f(x) - \sum_{k=0}^4 p_k x^k)^2 dx$$
On peut utiliser la fonction **intg** pour calculer les intégrales.
2. Même question sous la contrainte additionnelle : on cherche le polynôme de degré 4 qui approche au mieux la fonction f et dont le coefficient devant x^2 est moins grand que 0.001 en valeur absolue.
3. Dessiner les graphes de la fonction $f(x)$ et de deux polynômes introduits ci-dessus.