TP1 (suite) : Décomposition en série de Fourier

1 Position du problème

On considère un signal $f(t)$ défini sur l'intervalle $[0,1)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On sait d'après le cours que si ce signal est de carré intégrable, c'est-à-dire qu'il appartient à l'espace $L^2 = L^2([0,1);\mathbb{R})$, alors comme les fonctions $e_k(t) = exp(2i\pi t)$ forment une base de $L^2([0,1);\mathbb{C})$ (des fonctions à valeur complexes et qui englobent donc les fonctions à valeurs réelles), on doit pouvoir exprimer f comme suit

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) e_k(t),$$

où $c_k(f) = \langle f, e_k\rangle$. On aimerait bien représenter la décomposition en séries de Fourier de telles fonctions sur ordinateur de manière à bien se représenter comment les sommes partielles jusqu'à un ordre donné K de la série approxime la fonction f. Ce sont les facultés des bases à bien approcher des fonctions par des sommes finies qui vont dans la suite être le thème le plus important de ce cours. En effet, lorsqu'on a une image à approximer, à compresser ou bien encore à débruiter si elle a été endommagée, ce qui est important est de trouver une base dans laquelle cette image est bien approchée par des combinaisons linéaires finies d'éléments de cette base. La première question simple à se poser est : comme la base de L^2 la plus connue et la plus étudiée est la bases des séries de Fourier, cette base est-elle bonne pour approcher les fonctions, signaux ou images qui nous intéressent ? La première façon de répondre à cette question est de tester numériquement ce qui se passe.

2 Mise en oeuvre sous Scilab

Se donner une fonction sous Scilab correspond juste à se donner le vecteur des valeurs que prend la fonction f sur une grille de nombres rationnels $i/N, i = 1, ..., N$ où N est le nombre total de points en lesquels on a pu recueillir cette valeur. Ce vecteur est appelé la discrétisation de f.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Choisir une fonction f définie sur $[0, 1)$ à laquelle on rajoute un bruit et en donner sa discrétisation sous scilab.
2. Soit $K \in \mathbb{N}^*$. Calculer les discrétisations des fonctions e_k $(k = -K, ..., K)$ données dans la section précédente.
3. Construire la matrice qui contient les vecteurs de valeurs des e_k pour $k = -K, ..., K$.
4. Comment peut-on choisir K et N de manière cohérente ?
5. Utiliser cette matrice pour obtenir les coefficients $c_k(f)$ de f.
6. En déduire la discrétisation de la somme partielle $\sum_{k=-K}^{K} c_k(f)e_k$.
7. Pour différentes valeurs de K, afficher f et sa somme partielle $\sum_{k=-K}^{K} c_k(f)e_k$.