TP3 : Décomposition dans une base d'ondelette

Il existe toute sorte de base d'ondelettes. Nous proposons dans ce TP d'étudier la base d'ondelettes la plus simple, c'est-à-dire les ondelettes de Haar. Les deux activités principales dans le monde industriel et le monde universitaire sont :

- enlever du bruit
- faire de la compression

Une manière de faire pour compresser est de choisir les coefficients dans la base les plus petits et de les mettre à zero. De cette manière, nous ne conservons que quelques coefficients significatifs et c'est ce qui est transmis et enregistré en réalité. On retrouve ce mode de fonctionnement par exemple dans le format JPEG2000 : Le nombre de coefficients à mettre à zero correspond au taux de compression de l'information que l'on souhaite obtenir. Ce procédé permet également le débruitage : il faut dans ce cas bien choisir les coefficients à mettre à zéro.

Objectif :
L'objectif est dans un premier temps de mettre au point un programme Scilab permettant de projeter un signal audio dans la base de Haar et dans un deuxième temps de compresser ce signal audio à l'aide du programme obtenu.

1 Base de Haar

Considérons la fonction dite de Haar φ et l'ondelette de Haar ψ données par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1[, \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1[\end{cases} \quad \text{et } \psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1/2[, \\ -1 & \text{si } x \in [1/2,1[, \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1[. \end{cases}$$

Dans la définition d'une base d'ondelette, la fonction φ porte le nom de fonction d'échelle et la fonction ψ de fonction mère des ondelettes. L'idée de la décomposition en ondelettes est que si on décrit la projection du signal f sur V_j dans la base $(2^{j/2}\phi(2^j t - k))_{k\in\mathbb{Z}}$ et bien, on suit le signal au cours du temps et donc la plupart des coefficients seront importants sauf si le signal est nul sur des intervalles non négligeables (au sens pratique du terme!). En décomposant le signal sur diverses échelles, on espère que peu d'ondelettes d'échelle grossière seront utiles dans les zones ou le signal varie peu et peu d'ondelettes d'échelle fine seront utiles s'il y a des sauts localisés. Pour résumer, une décomposition sera bien adaptée pour des signaux qui varient peu la plupart du temps et qui ont des fortes oscillations de temps en temps ... Bien sûr, cette remarque est exagérée (mais pas tant que ca au final ...) et il y a des critères quantitatifs précis pour bien choisir une base d'ondelette comme de demander suffisamment de différentizabilité et de moments nuls de la fonction d'échelle ϕ. Nous ne rentrerons pas dans ces détails pour ce premier TP sur les ondelettes bien sûr!

En pratique, il va être très facile de décomposer la projection d'un signal (en vrai, une fonction) f dans la base habituelle $(2^{J/2}\phi(2^J t-k))_{k\in\mathbb{Z}}$ de V_J pour un niveau de résolution très précis, c'est-à-dire un J assez grand ce qui s'interprète dans le cas de Haar par une résolution, une "largeur de paté" si on veut, en $1/2^J$ très fine. La question est maintenant, si on a la décomposition de cette projection de f dans cette base, c'est-à-dire

$$P_{V_J}(f)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{Jk}2^{J/2}\phi(2^J t-k), \tag{1}$$

peut-on obtenir facilement les coefficients d_{jk} de $P_{W_j}(f)$ dans les bases d'ondelettes $(2^{j/2}\psi(2^j t-k))_{k\in\mathbb{Z}}$ ainsi que les coefficients c_{0k} de $P_{V_0}(f)$ dans les bases d'ondelettes

$$(2^{j/2}\phi(2^j t-k))_{k\in\mathbb{Z}}$$

. La réponse est "oui" et l'algorithme est dit Algorithme de Décomposition Pyramidale.

Exercice 1 : Quelle est l'expression des coefficients c_{Jk} ?

2 Algorithme de décomposition pyramidale

2.1 Approximation sur l'espace le plus fin V_J

On considère un signal, une fonction f dans $L^2(\mathbb{R})$ et ce signal peut être décomposé comme suit

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\{c_{0k}\phi_k(t)+\sum_{j=0}^{+\infty} d_{jk}\psi_{jk}(t)\right\} \tag{2}$$

où $\phi_k(t)=\phi(t-k)$, ϕ est la fonction de Haar, indicatrice de $[0,1]$, $\psi_{jk}=2^{j/2}\psi(2^j t-k)$ et ψ est l'ondelette de Haar.

Dans la réalité, on n'a pas f mais les valeurs de $f(k/2^J)$ pour $k\in\mathbb{Z}$ et même seulement pour un nombre fini de valeurs de k. C'est le signal échantillonné !

Exercice 2 : Montrer que l'on peut approximer les coefficients c_{Jk} de la projection de f sur V_J par

$$c_{Jk}\approx 2^{-J/2}f(k/2^J),\ \text{pour } k\in\mathbb{Z}. \tag{3}$$

Cet exercice nous permet donc d'avoir pour pas cher la décomposition de la projection de f au niveau le plus fin rien qu'à partir des échantillons de f tous les $1/2^J$!

2.2 Décomposition pyramidale proprement dite ou Décomposition en Ondelettes Rapide (Fast Wavelet Transform=FWT)

D'après l'Exercice 2, on a donc

$$P_{V_J}(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{Jk} 2^{J/2}\phi(2^J t - k) \approx \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k/2^J)\phi(2^J t - k). \tag{4}$$

On voudrait en déduire l'expression des coefficients $c_{J-1,k}$ et $d_{J-1,k}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. On a trois choses importantes à noter. La première est que bien évidemment,

$$P_{V_{J-1}}(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{J-1,k} 2^{(J-1)/2}\phi(2^{J-1}t - k) \tag{5}$$

avec $c_{J-1,k} = \langle f, \phi_{J-1,k}\rangle$ pour $k \in \mathbb{Z}$, la deuxième est que

$$P_{V_{J-1}}(f) = P_{V_{J-1}}(P_{V_J}(f)) \tag{6}$$

ce qui donne que $c_{J-1,k} = \langle \sum_{k'} c_{J,k'}\phi_{Jk'}, \phi_{J-1,k}\rangle$, et la troisième est que

$$\phi_{J-1,0} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \phi_{Jk}. \tag{7}$$

Exercice 3 : a. En utilisant l'expression de φ, calculer la formule donnant la décomposition de $\phi_{J-1,k}$ dans la base $(\phi_{J,l})_{l\in\mathbb{Z}}$, ou en d'autres termes, l'analogue de (7) pour $\phi_{J-1,k}$.

b. A quoi sont égaux les produits scalaires $\langle \phi_{Jk}, \phi_{Jk}\rangle$?

c. En déduire la formule donnant les $c_{J-1,k}$ en fonction de la famille $(c_{J,l})_{l\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 : Déduire de la même façon la formule donnant les $d_{J-1,k}$ en fonction des $c_{J,k}$.

Exercice 5 : Déduire des deux exercices précédents un algorithme pyramidal permettant à l'aide de la famille $(c_{Jk})_{k\in\mathbb{N}}$ d'obtenir de manière récursive les famille $(c_{0k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(d_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}}$.

Cet algorithme ne peut être mis en pratique que si il n'y qu'un nombre fini de c_{Jk} au départ, ce qui est bien le cas dans la pratique si on prend comme approximation des c_{Jk} les valeurs de $2^{j/2}f$ aux points multiples de $1/2^J$!

Maintenant qu'on a tous les coefficients d'ondelette, c'est-à-dire la contribution de f à tous les niveaux de résolution, il est possible de compresser ou de débruiter un signal.

2.3 Reconstruction ou Transformée en Ondelettes Inverse Rapide (IFWT)

Une fois qu'on a modifier les coefficients d'ondelettes comme on veut, on voudrait reconstruire le signal qui a ces coefficients d'ondelette. Par exemple, pour JPEG2000 cela correspond à l'operation de décompression !

Pour cela on écrit que $P_{V_j}(f) = P_{V_{j-1}}(f) + P_{W_{j-1}}(f)$ et que $c_{jk} = \langle P_{V_j}(f), \phi_{jk}\rangle$. Ainsi, on obtient

$$c_{jk} = \langle P_{V_{j-1}}(f), \phi_{jk}\rangle + \langle P_{W_{j-1}}(f), \phi_{jk}\rangle. \tag{8}$$

Exercice 6 : Donner l'expression des coefficients c_{jk} en fonction des $c_{j-1,k}$ et des $d_{j-1,k}$.

Exercice 7 : Déduire de l'exercice précédents un algorithme pyramidal permettant à l'aide des familles $(c_{0k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(d_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}}$ d'obtenir de manière récursive la famille $(c_{Jk})_{k\in\mathbb{N}}$.

3 Programmation

1. Programmez l'algorithme pyramidal sous Scilab avec comme données d'entrée les échantillons d'une fonction f que vous considérerez.
2. Ecrire une fonction Scilab qui effectue la reconstruction d'un signal à partir de ses coefficients d'ondelettes.
3. Appliquer l'algorithme de décomposition au signal de parole du TP 2.
4. Supprimer les coefficients qui sont petits dans la décomposition.
5. Reconstruire une approximation du signal à l'aide des coefficients conservés.