
Fiche d'exercices n°2

Exercice 1 : Soit $x \in \mathbb{R}$, les propositions suivantes sont-elles toujours vraies, fausses ?

Décrire les sous-ensembles de \mathbb{R} correspondants.

- « $x > 0$ ou $x < 1$ » ;
- « $x > 0$ et $x < 1$ » ;
- « $x^2 > 0$ » ;
- « $x^2 \geq 1$ ou $x < 1$ » ;
- « $x > 1 \Rightarrow x^2 \geq 1$ ».

Écrire la négation des propositions précédentes.

Soit $x \in \mathbb{R}$, que pensez-vous des propositions suivantes ?

- « $x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$ » ;
- « $x^2 \geq 1 \Leftrightarrow (x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1)$ ».

Exercice 2 : Écrire la réciproque et la contraposée des propositions suivantes :

- « S'il pleut, je vais au cinéma » ;
- « S'il pleut et s'il y a un bon film alors je vais au cinéma » ;
- « Si $1 + 1 = 3$ alors $D_1 \perp D_2$ ».

Exercice 3 : Pour $n \in \mathbb{Z}$, donner une définition formelle de « n est pair », « n est un multiple de 5 ».

Écrire formellement la proposition « Si n est impair alors $n^2 - 1$ est divisible par 8 ».

Exercice 4 : On considère les propositions suivantes :

- P1 : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 1$;
- P2 : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 1$;
- P3 : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 1$;
- P4 : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 1$.

Étudier la véracité de ces propositions puis donner leurs négations.

Écrire la négation de :

- P5 : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x - a| < \alpha \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \varepsilon))$.

Exercice 5 : Arthur, Bernard et Cédric sont soupçonnés d'avoir peint en vert le chat de la voisine. Ils font les déclarations suivantes :

- Arthur : « B est coupable et C est innocent » ;
- Bernard : « Si A est coupable, C aussi » ;
- Cédric : « Je suis innocent, mais au moins un des deux autres est coupable ».

Transcrire les trois déclarations dans le langage de la logique avec les lettres de propositions : a pour « A est coupable », b pour « B est coupable », c pour « C est coupable ».

1. Si Cédric a menti que dire de la déclaration d'Arthur ?
2. Dans la même hypothèse, que dire de la déclaration de Bernard ?
3. En supposant que tous ont dit la vérité, qui est innocent, qui est coupable ?
4. En supposant que tous sont coupables, qui a menti et qui a dit la vérité ?
5. En supposant que tout innocent dit la vérité et que tout coupable ment, qui est innocent et qui est coupable ?