
Fiche d'exercices n°3

Exercice 1 : Si A , B et C sont des ensembles, montrer que :

1. $A \cup A = A \cap A = A$;
2. $A \cup \emptyset = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$;
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
5. $(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \Leftrightarrow B \subset C$.

Exercice 2 : Écrire les éléments de $\mathcal{P}(E)$ dans les cas où $E = \{a\}$, $\{a, b\}$ et $\{a, b, c\}$.

Si E possède n éléments, combien $\mathcal{P}(E)$ possède-t-il d'éléments ?

Exercice 3 : Pour A et B deux ensembles, montrer que :

1. $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
2. $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$.

Exercice 4 : Soit un ensemble E et deux parties A et B de E . On appelle différence d'ensemble entre A et B et on note $A \setminus B$ la partie de E qui contient tous les éléments de A qui n'appartiennent pas à B (on ne suppose pas forcément que A contient B). Montrer que :

1. $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$;
2. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$.

On note $A \Delta B$ et on appelle différence symétrique de A et B l'ensemble $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

- (a) Faire une figure représentant A , B et $A \Delta B$.
- (b) Cette opération est-elle commutative ?
- (c) Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- (d) Que valent $A \Delta \emptyset$? $A \Delta A$? $A \Delta B$ si $A \subset B$?
- (e) Simplifier $(A \Delta B) \cup (A \Delta (E \setminus B))$.