

---

## Fiche d'exercices n°4

**Exercice 1 :** On considère l'application  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = x^4.$$

- Déterminer  $f(A)$  lorsque  $A$  vaut  $[-2, 1]$ ,  $\{0, 1\}$  et  $\{-1, 1\}$ .
- Déterminer  $f^{-1}(B)$  lorsque  $B$  vaut  $[0, 2]$ ,  $[-1, 4]$ ,  $[-2, -1]$ ,  $[1, 4]$  et  $\{3\}$ .
- La fonction  $f$  est-elle injective ? surjective ?

**Exercice 2 :** Soit  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par :

$$f(x) = -2x^2 + 1.$$

Déterminer les ensembles images  $f(\mathbb{R})$ ,  $f([2, 3])$  et  $f([-1, 1])$  ainsi que les préimages  $f^{-1}(\{0\})$ ,  $f^{-1}(\{1\})$  et  $f^{-1}(\mathbb{R}_-)$ .

**Exercice 3 :** Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?  
Donner l'application réciproque dans les cas où l'application est bijective.

- (a)  $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \longmapsto 2n$  ; (b)  $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \longmapsto -n$   
(c)  $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, n \longmapsto n + 1$  ; (d)  $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \longmapsto n + 1$   
(e)  $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$  ; (f)  $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto x^2$

**Exercice 4 :** Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

- (a)  $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$  ;  
(b)  $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 4x^3 + x$ .

**Exercice 5 :** Soient  $f : E \rightarrow G$  et  $g : G \rightarrow G$  deux applications, montrer que :

- $g \circ f$  injective  $\Rightarrow f$  injective ;
- $g \circ f$  surjective  $\Rightarrow g$  surjective.

Montrer que si  $f$  et  $g$  sont bijectives alors  $g \circ f$  est bijective et que  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

**Exercice 6 :** Soit  $f : E \rightarrow G$  une application. Montrer que :

- $f$  est injective si et seulement si pour tout  $A \subset E, f^{-1}(f(A)) = A$ .
- $f$  est surjective si et seulement si pour tout  $B \subset F, f(f^{-1}(B)) = B$ .

**Exercice 7 :** Soit  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \mathbb{R} \setminus \{2\}$  l'application définie par :

$$f(x) = \frac{2x + 5}{x - 1}.$$

Montrer que  $f$  est bijective et déterminer sa réciproque  $f^{-1}$ .

**Exercice 8 :** Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  l'application définie par :

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est bijective et déterminer sa réciproque.

**Exercice 9 :** Soit  $E$  un ensemble et  $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$  une application de  $E$  dans l'ensemble de ses parties. On considère

$$A = \{x \in E, x \notin f(x)\}.$$

- Montrer  $A \notin \text{Im}(f)$ ;
- En déduire que  $f$  n'est pas surjective.

**Exercice 10 :** On dit qu'un ensemble  $A$  est fini s'il existe un entier naturel  $n$  et une bijection de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  dans  $A$ . L'entier  $n$  est unique et est appelé le cardinal de  $A$ , noté  $\text{card}(A)$ .

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis, montrer que l'on a  $\text{card}(A) = \text{card}(B)$  si et seulement si il existe une bijection de  $A$  dans  $B$ .

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ ;
- Il existe une application injective de  $A$  dans  $B$ .
- Il existe une application surjective de  $B$  dans  $A$ .