
Fiche d'exercices n°5 : Application

Exercice 1 :

On considère l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, (a, b) \mapsto ab$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Calculer $f((3, 4)), f((1, 8)), f((4, 3))$.
4. Quels sont les antécédents de 3 ? Quels sont les antécédents de 60 ?
5. Déterminer $f(\{0, 1, 2\} \times \{1, 3\}), f(\{0\} \times \mathbb{N})$.
6. Déterminer $f^{-1}(\{1\}), f^{-1}(\{2\}), f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{6\}), f^{-1}(\{0, 1, 2\})$.

Exercice 2 :

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 3$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Déterminer $f([-1, 1]), f([-2, 1]), f([-5, -1])$.
4. Déterminer $f^{-1}([-1, 1]), f^{-1}([-2, 1]), f^{-1}([-5, -1])$.
5. Comparer $f^{-1}(f([-2, 4]))$ et $[-2, 4]$.
6. déterminer A et B de sorte que $g_1 : A \rightarrow B, x \mapsto x^2 - 3$ soit surjective et non injective.
7. déterminer A et B de sorte que $g_2 : A \rightarrow B, x \mapsto x^2 - 3$ soit non surjective et injective.
8. déterminer A et B de sorte que $g_1 : A \rightarrow B, x \mapsto x^2 - 3$ soit bijective.

Exercice 3 :

Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble non vide et A et B deux parties non vides de E .

On considère l'application $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$.

1. On choisit $A = \{a, b\}$ et $B = \{b, c, d\}$. Expliciter $f_{A,B}$.
2. On choisit $A = \{a\}$ et $B = \{c\}$. Expliciter $f_{A,B}$.
3. Les applications précédentes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 4 :

Soit E un ensemble non vide et A et B deux parties non vides de E . On considère l'application $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$.

1. Démontrer que f est injective si et seulement si $E = A \cup B$.
2. Démontrer que f est surjective si et seulement si $\emptyset = A \cap B$.
3. À quelle condition f est-elle bijective ? Déterminer alors son application réciproque.