 M. Duprez

Fiche d'exercices n°7 : relations d'équivalence

Exercice 1 : Montrer que 34^{2013} est multiple de 11.

Exercice 2 : Montrer les assertions suivantes :

1. Un nombre entier est divisible par 9 si et seulement si la somme des chiffre qui le compose est divisible par 9.
2. Un nombre entier est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée des chiffre qui le compose $((-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \cdots - a_1 + a_0)$ est divisible par 11.

Exercice 3 : Montrer que l'équation $x^2 + 1 = 7y$ n'admet pas de solution dans $\mathbf{Z}$.

Exercice 4 : Dans $\mathbb{R}$, on considère la relation suivante : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = x - y$.

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Discuter, suivant y, la classe d'équivalence de y.

Exercice 5 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$. On note $\mathcal{R}$ la relation dans $\mathbb{C}[X]$ définie par :

$$\forall A, B \in \mathbb{C}[X], A\mathcal{R}B \Leftrightarrow P \mid A - B.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}[X]$.

soit $A \in \mathbb{C}[X]$, montrer que la classe de A possède un unique polynôme de degré $< n$.

Montrer que pour A, B, C et $D \in \mathbb{C}[X]$, avec $A\mathcal{R}B$ et $C\mathcal{R}D$, on a

- $\overline{A + C} = \overline{B + D}$;
- $\overline{AC} = \overline{BD}$.

Qu'est-ce que cela vous inspire ?