M. Duprez

Fiche d'exercices n°4

Exercice 1 : Effectuer la multiplication du polynôme $P = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ par le polynôme $Q = (2X^2 - X + 2)$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$X^n - 1 = (X - 1) \sum_{k=0}^{n-1} X^k.$$

Exercice 2 : Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

- $A = 2X^5 + 3X^4 + 4X^3 + 4X^2 - 3X + 2$ et $B = X^3 + X^2 - X + 1$;
- $A = 7X^4 - X^3 + 2X - 4$ et $B = X^2 - 3X + 5$;
- $A = 4X^3 + X^2 - 3\mathrm{i}X + 5$ et $B = X + 1 + i$.

Exercice 3 : Trouver un polynôme P tel que le reste de la division euclidienne de P par X, $X - 1$, $X + 1$ soit égal à 3.

Exercice 4 : Sans effectuer la division euclidienne, déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{79} - 3X^2 + 1$ par $X^2 - 1$ puis le reste de la division euclidienne de $X^{11} - 1$ par $X^3 - 1$.

Exercice 5 : Trouver les racines du polynôme $X^2 - (3 + 4i)$. Puis, trouver les racines du polynômes $P = X^2 + (-3 + i)X + (2 - 6i)$.

Exercice 6 : Soit P un polynôme et P' son polynôme dérivé. Montrer que l'on a

$$\forall a \in \mathbb{R}, (X - a)^2 | P \Leftrightarrow \big(P(a) = 0 \text{ et } P'(a) = 0\big).$$

Exercice 7 : Pour les polynômes suivants, donner la décomposition en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis la décomposition en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$:

- $P_1 = X^2 + 5X + 6$;
- $P_2 = X^4 + 5X^2 + 6$;
- $P_3 = X^4 - 4$;
- $P_4 = 6X^3 - 17X^2 + 14X - 3$;
- $P_5 = 2X^3 - X^2 - X - 3$;
- $P_6 = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$;

Exercice 8 : Quels sont les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que les fonctions polynomiales associées sont périodiques ? Mêmes questions en remplaçant périodiques par paires, impaires, bornées.

Exercice 9 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $(X-1)^2$ divise le polynôme $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.

Exercice 10 : Soit $P = X^6 + X^3 + 1$, en considérant les polynômes $X^9 - 1$ et $X^3 - 1$, donner toutes les racines de P. En déduire la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 : En effectuant la division suivant les puissances croissantes, montrer que

$$1 = (1 - X^2)(1 + X^2 + X^4 + \cdots + X^{18}) + X^{20}.$$

Exercice 12 : Dans $\mathbb{C}[X]$, on considère le polynôme $P = X^{2n} - 1$.

1. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$. En déduire que $X^2 - 1$ divise P.

2. Soit Q le quotient de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$. Montrer que l'on a $Q(1) = n$.

3. En déduire que l'on a

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{2n-1} \left(1 - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = n.$$

4. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right|^2 = n.$$

5. Conclure que $\sqrt{n} = 2^{n-1} \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.