Fiche professeur
Activité sur les phénomènes périodiques

Cette activité a été proposée en cours de Mathématiques en classe de terminale S, en lien avec le cours de Sciences Physiques (ondes sonores, analyse spectrale d'un son). Elle peut aussi être proposée en cours de Mathématiques de première STI2D /STL (voir programmes en annexe 3).

I- Fiche n°1 (étapes 1 à 3 + synthèse)

But :

Il s'agir de faire découvrir aux élèves les fonctions trigonométriques définies sur R par $f(t) = acos(\omega t + \varphi)$ et $g(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$ où a, ω et φ sont des réels, et l'influence de chaque paramètre.
Ceci n'est pas un attendu du programme de Mathématiques de la section S mais peut s'avérer utile en Sciences Physiques. Par contre l'étude de ces fonctions doit être abordée en classe de première STI2D ou STL.
L'activité s'appuie sur une définition dynamique des courbes à l'aide du logiciel geogebra qui sera amplement utilisé (voir explications en annexe 1).

Mise en place :

L'activité peut être faite en introduction du cours de Mathématiques sur les fonctions trigonométriques ou juste après avoir défini les fonctions cosinus et sinus.
Les définitions données en début d'activité sont connues des élèves.
L'activité a été testée en classe avec manipulation préalable du logiciel par le professeur (étape 1 à 3) et image vidéo-projetée puis manipulation du logiciel par les élèves (synthèse) sur poste individuel.
Ce mode de fonctionnement a nécessité un peu plus d'une heure (étape 1 en fin de cours en classe entière puis suite de l'activité en groupe).
On peut imaginer laisser une plus grande liberté à la manipulation par les élèves, mais il faut alors prévoir plus de temps.

a) Etape 1 : fonctions cosinus et sinus

Le professeur ou les élèves définissent la notion de vitesse angulaire.
Le document geogebra "activité_périodiques.ggb" est vidéo-projeté en classe, avec $\varphi = 0$, $a = 1$ et $\omega = 1$, le professeur montre la manipulation et la construction des courbes (cf. annexe 1).

Exemple avec $a = 3$ (dilatation verticale de la courbe mais période inchangée).

b) Etape 2 : application d'une phase initiale

♦ Premier exemple avec une phase $\varphi = \frac{\pi}{3}$ [2π] : manipulation du logiciel par le professeur.

La nouvelle courbe est obtenue à partir de la courbe de la fonction cos par translation de vecteur $-\frac{\pi}{3}\vec{i}$.

Sa nouvelle équation est : $y = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$.

On peut faire remarquer aux élèves que l'on a aussi : $y = \cos\left(t - \frac{5\pi}{3}\right)$ en prenant $\varphi = -\frac{5\pi}{3}$ [2π] : translation de vecteur $\frac{5\pi}{3}\vec{i}$.

A noter : les fonctions associées et donc les translations entre courbes ne sont plus étudiées en mathématiques en section S (elles le sont toujours en première STI2D-STL).

♦ Une fois que les élèves ont compris le lien entre courbes translatées et fonctions associées, ils cherchent par eux-mêmes les phases et équations des trois courbes suivantes en les comparant à la courbe de la fonction cos dessinée en pointillés (recherche sur papier ou sur ordinateur individuel si temps).

Réponses : C_1 : $y = \cos\left(t + \frac{11\pi}{6}\right)$ ou $y = \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$; C_2 : $y = \cos\left(t + \frac{3\pi}{4}\right)$; C_3 : $y = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$.

On remarque que la courbe C_3 correspond à la courbe de la fonction sin car $\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin t$ pour tout réel t (vu en première S).
Si la recherche s'est faite sur papier, une vérification peut être réalisée avec le logiciel geogebra par le professeur ou en faisant manipuler un élève.

c) Etape 3 : application d'une pulsation

♦ On se place sur le même fichier geogebra à $\varphi = 0$, $a = 1$ et $\omega = 4$.

Lecture de la période sur le graphique : $T = \frac{\pi}{2}$ et donc la fréquence vaut : $f = \frac{2}{\pi}$ (explication rapide de ce que représente la fréquence).

♦ Relation entre vitesse angulaire et période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ou $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

La formule n'est pas forcément immédiate pour les élèves, on peut faire ressortir l'inverse proportionnalité qui lie T et ω sur des exemples.

Vérification : $\cos[\omega(t+T)] = \cos[\omega(t+\frac{2\pi}{\omega})] = \cos(\omega t + 2\pi) = \cos(\omega t)$ pour tout réel t.

♦ Lectures graphiques (à nouveau recherche sur papier ou logiciel) à l'aide de la courbe de la fonction cos dessinée en pointillés.

C_1 : on trouve $T = 4\pi$ donc $\omega = \frac{1}{2}$ d'où l'équation : $y = \cos(0{,}5t)$.

C_2 : on trouve $T = \frac{2\pi}{3}$ donc $\omega = 3$ d'où l'équation : $y = \cos(3t)$.

d) Synthèse

Les élèves sont placés devant des postes individuels si possible. Ils manipulent le mode trace du logiciel puis font apparaître directement les courbes.
Ils doivent trouver les paramètres φ, a et ω liés à chaque courbe.

C_1 : $T = \frac{\pi}{2}$ donc $\omega = 4$, $a = 3$ et $\varphi \approx 5{,}5 \approx 21\times\frac{\pi}{12}$ d'où l'équation : $y = 3\cos\left(4t+\frac{7\pi}{4}\right) = 3\cos\left(4t-\frac{\pi}{4}\right)$.

C_2 : $T = 2\pi$ donc $\omega = 1$, $a = 4$ et $\varphi \approx 2{,}09 \approx 8\times\frac{\pi}{12}$ d'où l'équation : $y = 4\cos\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)$.

C_3 : $T = \frac{2\pi}{3}$ donc $\omega = 3$, $a = 2$ et $\varphi \approx 2{,}62 \approx 10\times\frac{\pi}{12}$ d'où l'équation : $y = 2\cos\left(3t+\frac{5\pi}{6}\right)$.

Pour trouver la valeur de φ, on manipule le curseur jusqu'à ce que la courbe corresponde.
Attention : si $\omega \neq 1$ il n'est plus judicieux de regarder le "déphasage" entre les courbes qui ont subi alors une dilatation horizontale par rapport à celle de la fonction cos.

Prolongement :

Même si cela n'est pas stipulé par le programme, on peut faire figurer dans le cours un petit paragraphe sur ce type de fonctions et en donner les dérivées (application de la composition des fonctions cos et sin avec des fonctions affines) : voir annexe 2.

II- Diaporama "applications physiques.ppt"

Ce document, projeté en classe entière, permet de conclure la synthèse de la première fiche par des exemples d'applications concrètes en Sciences Physiques, même si certains ne sont plus étudiés en section S.

La dernière partie du diaporama fait référence aux ondes sonores et à l'analyse spectrale au programme de terminale S en Sciences Physiques.
Elle permet également d'introduire la fiche 2 de l'activité sur les polynômes de Fourier.

III- Fiche n°2 (étapes 4 et 5)

But :

Par manipulation d'exemples sur logiciels, on tente de faire comprendre aux élèves que toute fonction périodique continue peut s'écrire comme combinaisons de fonctions trigonométriques, telles celles étudiées dans la fiche 1, et faire le lien avec l'analyse spectrale vue en Sciences Physiques.

Mise en place :

L'activité a été introduite par le diaporama en classe entière.
Elle peut se placer en séance de groupe (1 heure).

a) Etape 4 : addition de deux cosinus

Deux tiges mises bout à bout tournent à des vitesses angulaires différentes autour de leur pivot.

♦ Coordonnées du point N :
On pose $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$.
Alors $M(\cos t\ ;\ \sin t)$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $N(0{,}5\cos(2t)\ ;\ 0{,}5\sin(2t))$ dans le repère $(M\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Or, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN}$ donc, par addition des coordonnées :

$$N(\cos t + 0{,}5\cos(2t)\ ;\ \sin t + 0{,}5\sin(2t)) \text{ dans le repère } (O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}).$$

♦ Les fonctions définies par $\cos t$ et $\sin t$ ont pour période 2π, les fonctions définies par $0{,}5\cos(2t)$ et $0{,}5\sin(2t)$ ont pour période π donc 2π est aussi acceptable, on en déduit que la période des coordonnées est $T = 2\pi$.

Pour visualiser la courbe obtenue, on utilise le fichier geogebra "Fourier_cosinus.ggb" en rentrant les bons paramètres. La courbe vidéo-projetée est manipulée par le professeur ou un élève.

Les élèves découvrent ainsi que si on additionne deux cosinus de paramètres différents alors la courbe obtenue n'est plus forcément sinusoïdale mais reste périodique dans l'exemple pris.
De plus la période de la nouvelle courbe est un multiple commun (par un nombre entier) aux deux périodes des deux courbes.
Attention : s'il n'existe pas un tel multiple, alors la fonction n'est plus périodique.

b) Etape 5 : polynôme de Fourier

Le professeur et les élèves lisent ensemble l'introduction aux polynômes de Fourier.

♦ Les élèves se répartissent ensuite sur des postes individuels afin de manipuler le logiciel "fourier_fr" qui permet de créer des signaux sonores à partir de combinaisons d'expressions trigonométriques du type $\cos(kx)$ ou $\sin(kx)$ et d'entendre le son produit.
Il permet aussi de décomposer certains signaux connus : triangle, carré, dent de scie …
Ce logiciel est téléchargeable gratuitement sur le site du Phet de l'université du Colorado à l'adresse suivante :
http://phet.colorado.edu/fr/simulation/fourier.

Les élèves manipulent le logiciel pendant 20 minutes et relèvent les coefficients des harmoniques en sinus des signaux précédents :

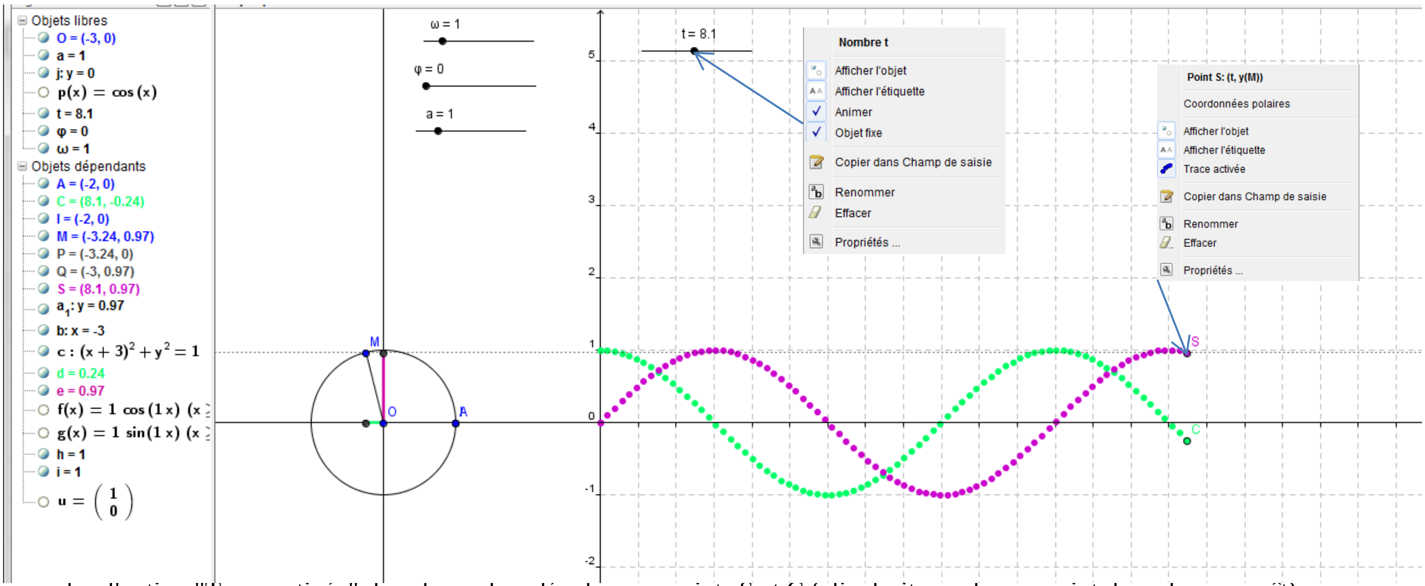
signal	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
triangle	0,81	×	-0,09	×	0,03	×	-0,01	×	0,01	×
carré	1,27	×	0,42	×	0,25	×	0,18	×	0,14	×
Dent de scie	0,63	-0,31	0,21	-0,15	0,12	-0,10	0,09	-0,07	0,07	-0,06

♦ Document geogebra "fourier_sinus.ggb" :
On reporte les coefficients dans la fenêtre tableur.
Attention : les coefficients représentent des longueurs de tiges, ils ne peuvent donc pas être négatifs, on en prendra la valeur absolue et on changera la phase initiale.
On remarque que par exemple : $-0{,}09\sin(3t) = 0{,}09\sin(3t + \pi)$ pour tout réel t. Il suffit donc de considérer une phase de π si le coefficient d'origine est négatif, et une phase nulle s'il est positif.

On retrouve les signaux visualisés à l'aide du précédent logiciel, mais avec cette fois-ci une construction géométrique et dynamique des additions des harmoniques.

Annexe 1 : fichiers geogebra et logiciel fourier_fr

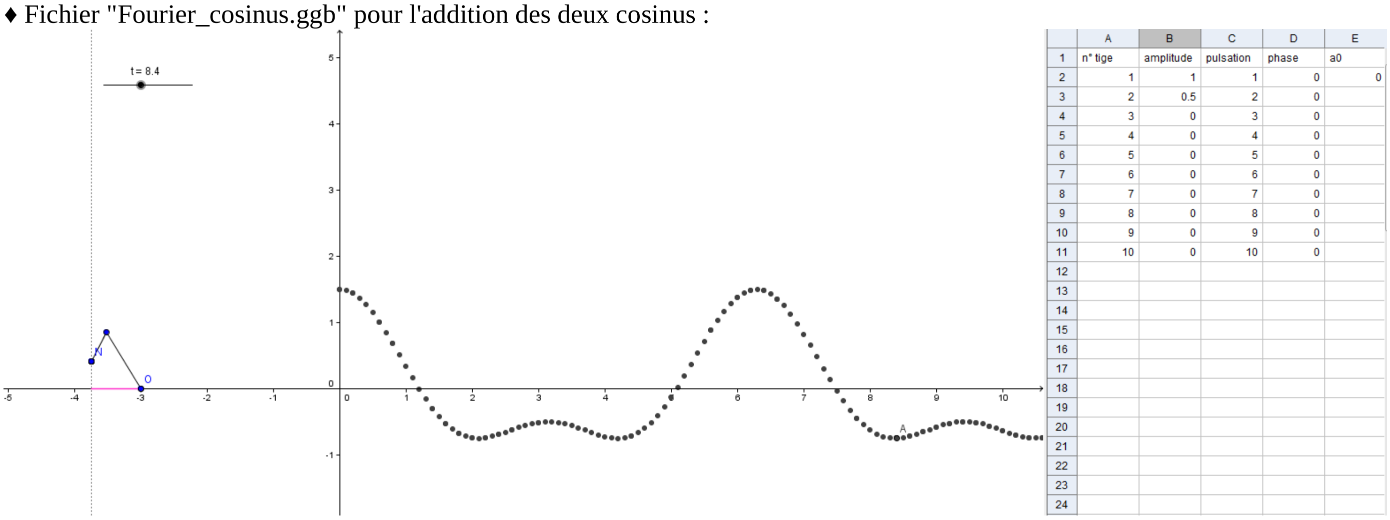
♦ Fichier "activité_périodiques.ggb" :



- cocher l'option "Trace activée" dans les cadres dévolus aux points S et C (clic droit sur chaque point, le cadre apparaît),
- cocher l'option "Animer" dans le cadre dévolu au nombre t (clic droit sur le point du curseur t).

On peut aussi faire apparaître directement les courbes en cochant devant f(x) et g(x) dans la fenêtre algèbre.

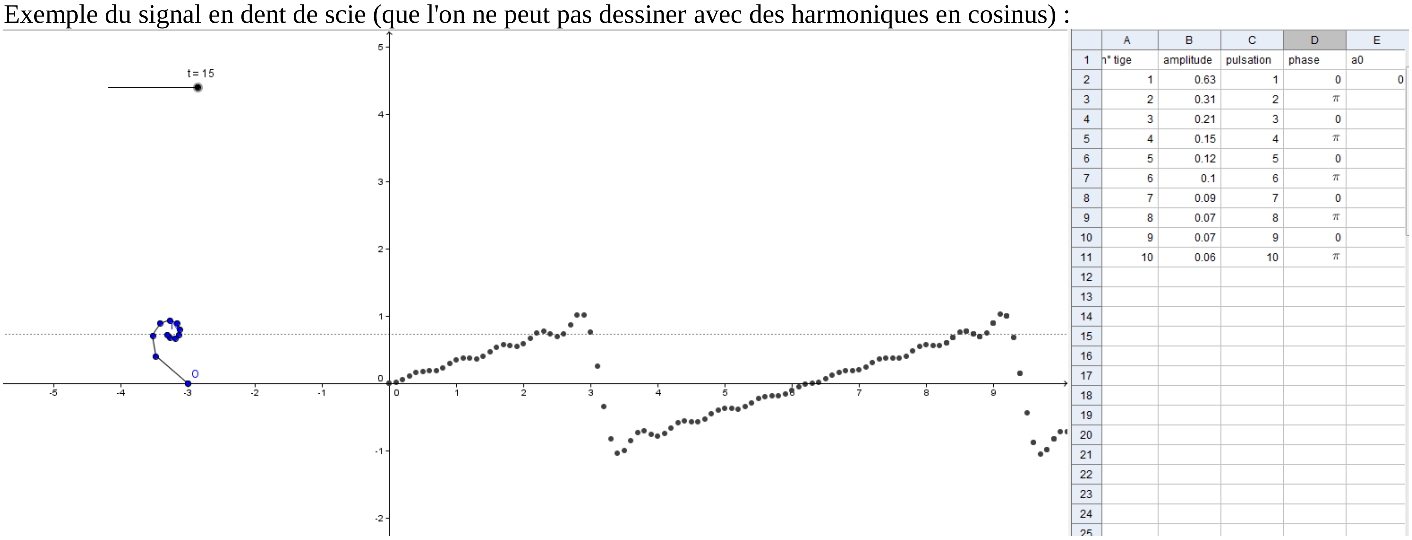
♦ Fichier "Fourier_cosinus.ggb" pour l'addition des deux cosinus :



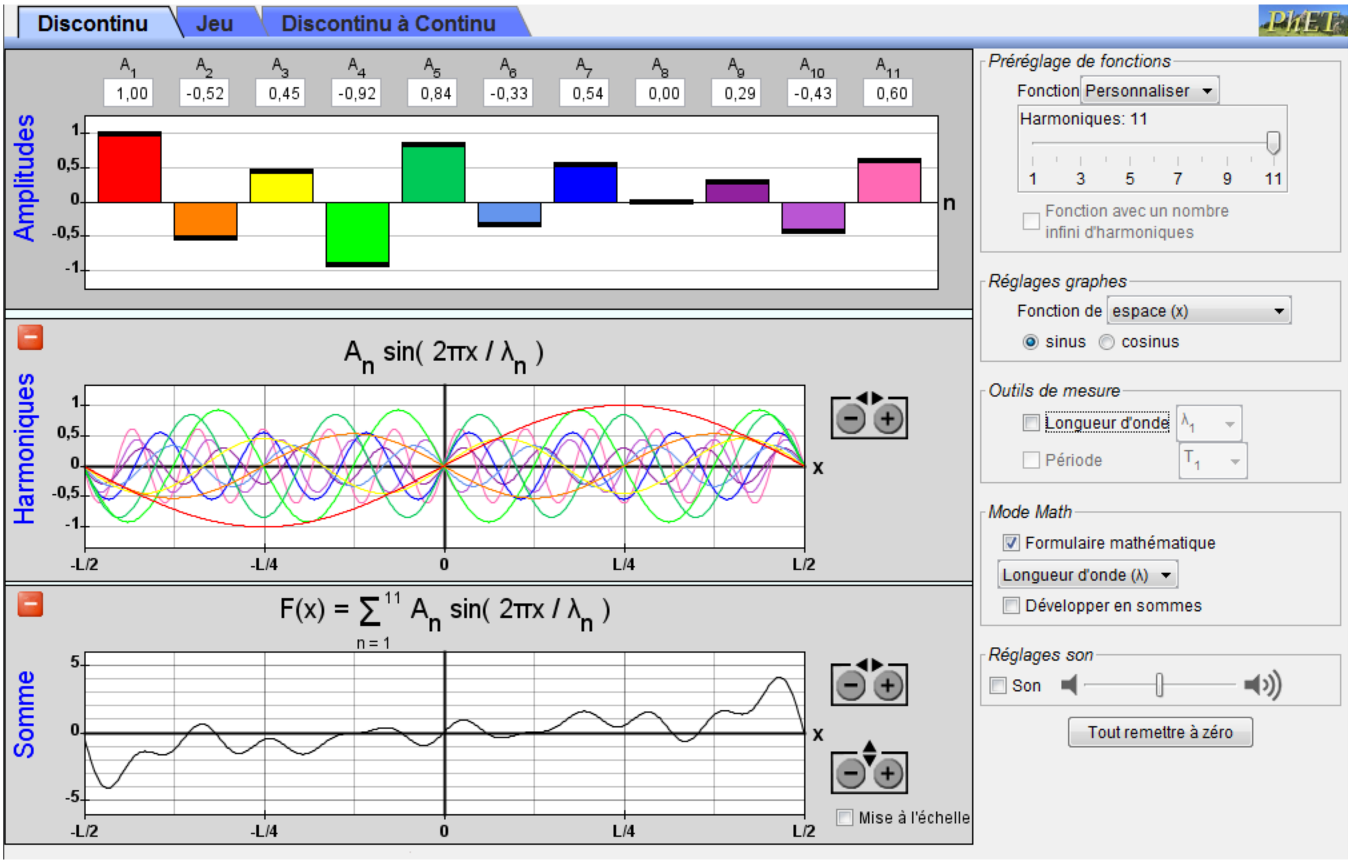
Le document a été créé pour une série de Fourier jusqu'à 10 harmoniques, on règle donc les paramètres du tableur pour 2 tiges seulement (amplitude nulle pour les autres tiges), des phases initiales nulles et $a_0 = 0$.

♦ Fichier "Fourier_sinus.ggb" pour les signaux électriques connus :

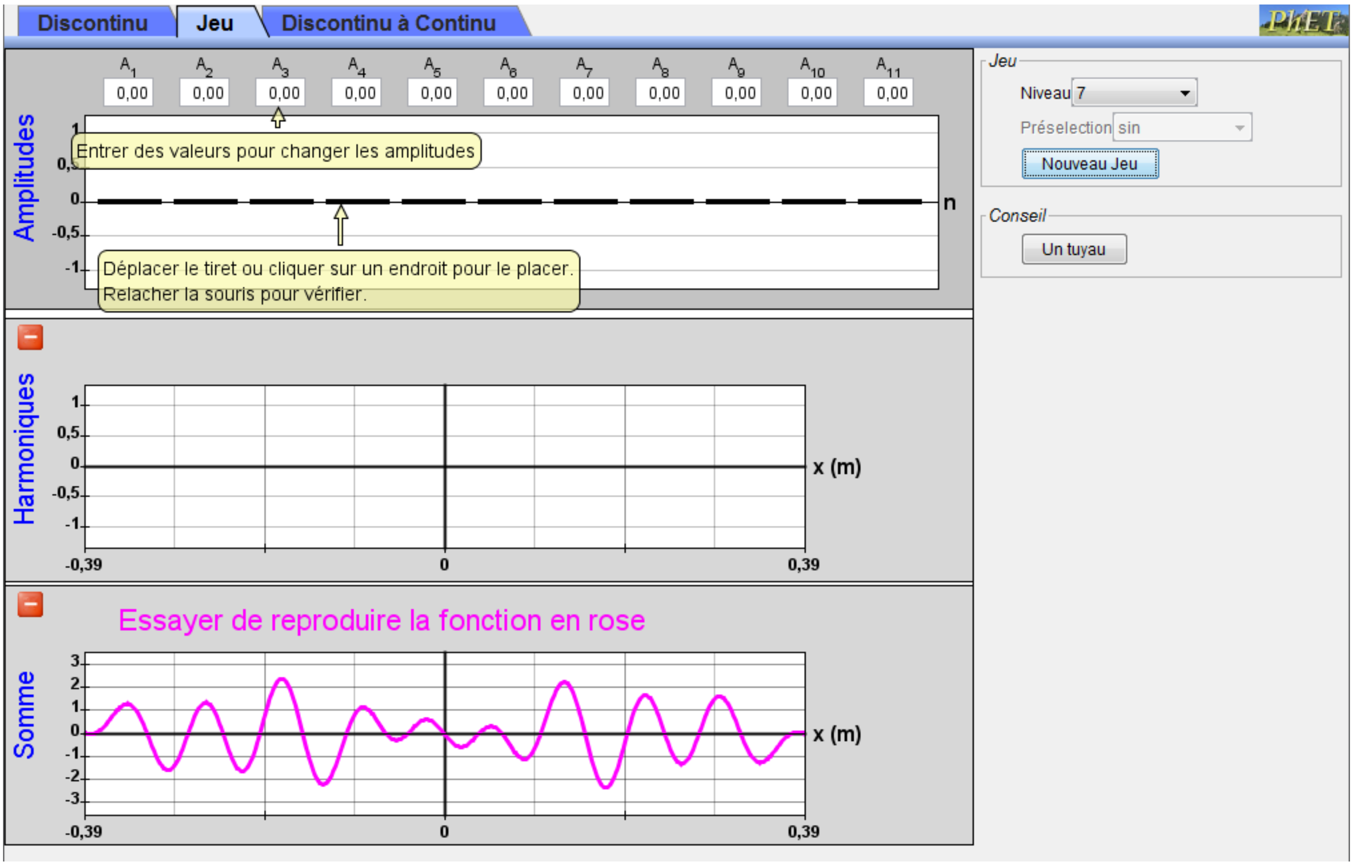
Exemple du signal en dent de scie (que l'on ne peut pas dessiner avec des harmoniques en cosinus) :



♦ **logiciel fourier_fr**
Executable jar file – 1,34 Mo.
Gratuit et téléchargeable sur le site du Phet de l'université du Colorado à l'adresse suivante :
http://phet.colorado.edu/fr/simulation/fourier.



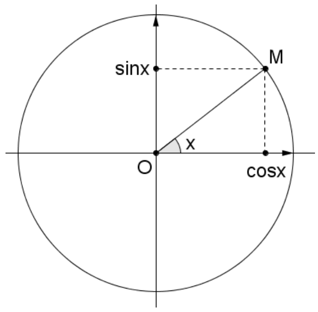
Onglet "Discontinu" : on crée soi-même ses harmoniques, on les visualise séparément au centre et leur somme en bas d'écran. On peut écouter le son produit en cochant "Son".



Onglet "Jeu" : il faut régler les harmoniques pour retrouver la courbe rose proposée (aides possibles et solution).

Annexe 2 : cours de terminale S

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES



1- Rappels

A tout réel x correspond un unique point M du cercle trigonométrique tel que $(\vec{\imath}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = x$ rad $[2\pi]$.
Dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$: **M a pour coordonnées (cos x ; sin x)**.

2- Etude des fonctions cosinus et sinus

Prop : Les fonctions définies par $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sin x$ sont **périodiques de période ……**

En effet, $\cos(x + …) = \cos x$ et $\sin(x + …) = \sin x$ pour tout réel x.
(les points correspondants aux angles x et $x + …$ sont confondus sur le cercle).

Il suffit alors d'étudier ces deux fonctions sur l'intervalle$[-\pi\ ;\ \pi]$.
On complétera ensuite la courbe par ……………………………

fonction $f(x) = \cos x$

$\cos(-x) =$
on dit que la fonction cos est **paire**
(*deux opposés ont la même image*).
On l'étudie sur $[0\ ;\ \pi]$ et on complète
sa courbe par ……………………………

Dérivée : **cos'(x) = – sinx**

variations :

x	0 $\qquad\qquad$ π
$\cos'(x)$	
$\cos x$	

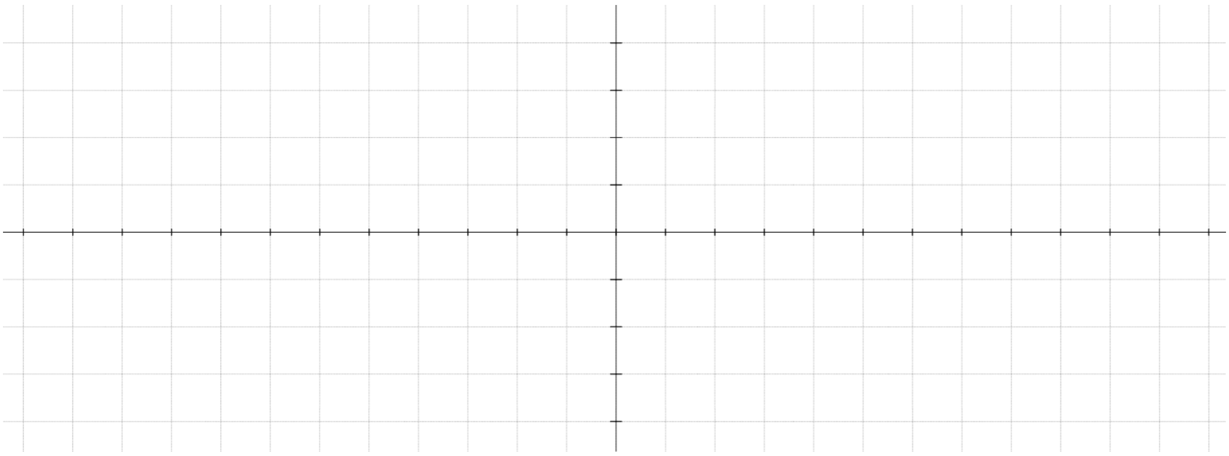
fonction $g(x) = \sin x$

$\sin(-x) =$
on dit que la fonction sin est impaire
(*deux opposés ont des images opposées*).
On l'étudie sur $[0\ ;\ \pi]$ et on complète
sa courbe par ……………………………

Dérivée : **sin'(x) = cosx**

variations :

x	0 $\qquad\qquad$ π
$\sin'(x)$	
$\sin x$	



Les deux courbes sont des **sinusoïdes**, la courbe de la fonction sin se déduit de celle de la fonction cos par ………………………
En effet :

3- Composition

On pose $f(x) = a\cos(\omega x + \varphi)$ et $g(x) = a\sin(\omega x + \varphi)$ où a, ω et φ sont des constantes réelles.
Par composition de la fonction affine $x \to \omega x + \varphi$ suivie des fonctions cos ou sin, f et g sont dérivables sur R avec :

$$\boldsymbol{f'(x) = -a\omega\sin(\omega x + \varphi)} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{g'(x) = a\omega\cos(\omega x + \varphi)}.$$

4- limites

Prop : Les fonctions cos et sin n'ont pas de limite en l'infini mais : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$.

Dem : On reconnaît le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$.

Annexe 3 : programmes de Mathématiques et Sciences Physiques

Sciences Physiques en terminale S

Enseignement obligatoire

Observer

Notions et contenus	Compétences exigibles
Ondes progressives périodiques, ondes sinusoïdales.	Définir, pour une onde progressive sinusoïdale, la période, la fréquence et la longueur d'onde. Connaître et exploiter la relation entre la période ou la fréquence, la longueur d'onde et la célérité. *Pratiquer une démarche expérimentale pour déterminer la période, la fréquence, la longueur d'onde et la célérité d'une onde progressive sinusoïdale.*
Ondes sonores et ultrasonores. Analyse spectrale. Hauteur et timbre.	*Réaliser l'analyse spectrale d'un son musical et l'exploiter pour en caractériser la hauteur et le timbre*.

Enseignement de spécialité

Thème 2 : son et musique

Domaines d'étude	Mots-clés
Instruments de musique	Instruments à cordes, à vent et à percussion Instruments électroniques. Acoustique musicale ; gammes ; harmonies. Traitement du son.
Émetteurs et récepteurs sonores	Voix ; acoustique physiologique. Microphone ; enceintes acoustiques ; casque audio. Reconnaissance vocale.
Son et architecture	Auditorium ; salle sourde. Isolation phonique ; acoustique active ; réverbération.

Mathématiques en terminale S

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonctions sinus et cosinus	Connaître la dérivée des fonctions sinus et cosinus. Connaître quelques propriétés de ces fonctions, notamment parité et périodicité. Connaître les représentations graphiques de ces fonctions.	On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 et la limite en 0 de $(\sin x)/x$. En dehors des exemples étudiés, aucun développement n'est attendu sur les notions de périodicité et de parité. On fait le lien entre les résultats obtenus en utilisant le cercle trigonométrique et les représentations graphiques des fonctions cos et sin. SPC : ondes progressives sinusoïdales, oscillateur mécanique.

Mathématiques en première STI2D et STL

En plus de ce qui est demandé en terminale S :

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Etude de fonctions Représentation graphique des fonctions $u + k$, $t \mapsto u(t+\lambda)$ et $\|u\|$. **Dérivation** Dérivée des fonctions usuelles : […] $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$. Dérivée de $t \mapsto \cos(\omega t+\varphi)$ et $t \mapsto \sin(\omega t+\varphi)$, ω et φ étant réels.	Obtenir la représentation graphique de ces fonctions à partir de celles de u.	Il s'agit ici de développer une aisance dans la manipulation des représentations graphiques, par exemple lors de la détermination des paramètres d'un signal sinusoïdal.