Activité | formation d'une couche de glace à la surface d'un lac

Nous proposons d'étudier la formation d'une couche de glace à la surface d'un étang et de suivre l'évolution de son épaisseur au cours du temps…

1. Chaleur latente de l'eau L

Pour se transformer en glace solide, l'eau liquide doit perdre de l'énergie que l'on peut appeler **énergie de solidification** dont la valeur est **6kJ.mol^{-1}**. Calculer l'énergie (**chaleur latente**) notée **L** (en kJ.kg^{-1}) perdue par 1kg d'eau liquide se solidifiant à 0°C.

2. Modélisation

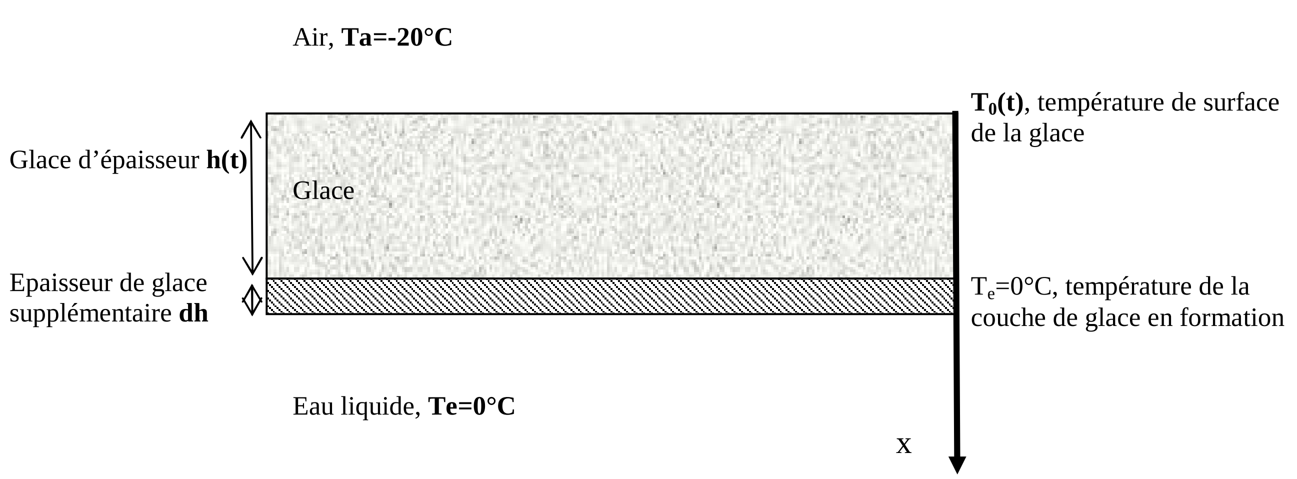
On considère que la température de l'eau liquide du lac est homogène et a par conséquent partout la même valeur **T_e=0°C=273K** à un instant **t=0** pris comme origine.

Pour que l'eau du lac gèle, il faut que l'eau perde de l'énergie. Cette énergie perdue va être évacuée vers la surface du lac et être dissipée dans l'air situé au dessus de la surface du lac, air qui est à une température plus basse **T_a=-20°C=253K. En effet l'énergie circule toujours du corps le plus chaud (l'eau) vers le corps le plus froid (l'air)**.

L'énergie perdue par l'eau va d'abord remonter à la surface entre traversant **l'épaisseur h de glace** puis cette énergie va passer de la glace dans l'air.

Il y a deux grandeurs qui vont varier en fonction du temps : d'une part **l'épaisseur de glace h(t)** qui est une fonction croissante et d'autre part la **température de surface de la glace T_0(t)** qui est une fonction décroissante du temps.

Schéma récapitulatif



2.1. La quantité d'énergie qui circule à l'intérieur de la glace chaque seconde se calcule à l'aide de l'expression suivante :

$$\boxed{E_1 = K \times S \times \frac{(T_e - T_0(t))}{h} \times dt}$$

avec **K=2,1J.s^{-1}.m^{-1}.K^{-1}** est un coefficient de proportionnalité
dt=1s et **S=1000m²**, surface du lac

On remarque que cette énergie est proportionnelle à la différence de température $(T_e - T_0(t))$, donc plus la différence de température est importante et plus l'énergie évacuée est grande.

A **t=1h**, l'épaisseur de glace est égale à **h(1h)=1,07.10^{-2}m** et **T_0(1h)=-4,07°C**, calculer l'énergie **E_1** (en joule) évacuée chaque seconde vers la surface.

2.2. A la surface de la glace, l'énergie qui passe de l'eau gelée (solide) dans l'air, chaque seconde, peut se calculer avec l'expression :

$$\boxed{E_2 = \alpha \times (T_0(t) - T_a) \times S \times dt}$$

avec **α=50J.s^{-1}.m^{-2}.K^{-1}** est un coefficient de proportionnalité
dt=1s et **S=1000m²**, surface du lac

A **t=1h**, calculer l'énergie **E_2** évacuée chaque seconde de la glace vers l'air. Observer que **E_1=E_2**.

2.3. **A t=1h**, l'épaisseur supplémentaire de glace qui se forme est égale à **dh=2,68.10^{-6}m**, calculer la **masse de glace** qui se forme chaque seconde sous la surface du lac. On donne la masse volumique de la glace **ρ=900kg.m^{-3}**.

2.4. Calculer l'énergie **E_3** perdue par l'eau qui se solidifie chaque seconde quand **t=1h**. Observer que **E_1=E_2=E_3**.

2.5. Montrer que $\boxed{E_3 = \rho \times dh \times S \times L}$.

3. Résolution numérique du problème à l'aide d'un tableur

Dans la partie précédente nous avons remarqué que « logiquement » **E_1=E_2=E_3**. En effet l'énergie perdue par l'eau E_3 est égale à l'énergie E_1 qui s'évacue à travers la glace et qui est elle-même égale à l'énergie E_2 qui passe de la glace dans l'air.

3.1. En utilisant l'égalité E_1=E_2, montrer que $\boxed{T_0(t) = \frac{KT_e + \alpha h T_a}{K + \alpha h}}$.

3.2. En déduire à partir du résultat précédent et de l'égalité E_1=E_3 que :

$$\boxed{dh = \frac{\alpha}{L\rho} \times \frac{(T_e - T_a)}{(K + \alpha h)} \times K \times dt}$$

3.3. Utilisation d'un tableur pour calculer h(t) et T_0(t) et tracer les courbes.

- A t=0, h(0)=0m, calculer dh.
- En déduire, l'épaisseur de glace à t=1s.
- Puis calculer dh à t=1s…
- Compléter le tableau :

t (s)	**h (m)**	**dh (m)**
0	0	
1		
2		
3		

- Utiliser un tableur pour calculer h pour t<3600s.

Prolongements mathématiques :

1. Etude de la fonction racine $h(t) = \frac{K}{\alpha}\left[\sqrt{1 + \frac{2\alpha^2}{KL\rho}(T_e - T_a)t} - 1\right]$

Etude la dérivée, interprétation en terme de vitesse de formation de la glace

Limites de la fonction

2. Etude le fonction $T_0(t) = T_a + \frac{T_e - T_a}{\sqrt{1 + \frac{t}{\tau}}}$, avec $\tau = \frac{KL\rho}{2\alpha^2 (T_e - T_a)}$

Etude de la dérivée

Limites de la fonction

Remarques : Modèle / physique / mathématiques

La modélisation proposé ici fait appel au « bon sens ».C'est de la physique « sensible », « logique ». En effet le modèle proposé pour les échanges d'énergie postule que ces échanges, ces transferts sont proportionnels à des différences de température (entre l'air et la glace, entre la glace et l'eau). De manière Plus la différence de température est grande (et plus le déséquilibre est grand), plus le transfert d'énergie par seconde et par mètre carré de surface est important. On peut comprendre et admettre ce résultat assez facilement… Une fois ces relations, ces lois comportementales physiques postulées, admises, comment faire pour en déduire la loi d'évolution de l'épaisseur de glace en fonction du temps h(t) ?

La physique (dans ce cas) peut se faire sentir, ressentir intuitivement à l'aide du langage courant, d'un peu de bon sens et aussi d'un peu d'habileté expérimentale pour vérifier la validité du modèle. En revanche, il faut changer de langage, de logique, introduire les techniques mathématiques, pour établir la loi de variation de l'épaisseur de glace en fonction du temps et voir apparaître la fonction racine…