Table des matières

La sphère est la plus parfaite de toutes les figures

Je remercie du fond du cœur mes grand-parents
pour leur aide et leur soutien moral au cours de cette année...

I Lien avec la géométrie Euclidienne

1)Structure

Le traité des *Sphériques* de Ménélaüs se divise en 3 livres. Le premier suit la progression de la tradition euclidienne dans les Éléments, le second s'attache plus à l'application que peut avoir cette géométrie à l'astronomie, et le troisième est consacré à la trigonométrie sphérique dont le théorème principal est le théorème dit de Ménélaüs.

Tout d'abord, dans ce traité de Ménélaüs, les propositions sont énoncées et démontrées de la même manière que le faisait la tradition euclidienne. Nous pouvons reprendre les termes de Proclus pour expliquer en quoi cela consiste :

« Tout problème et tout théorème, s'il est parfaitement complet quant à ses parties, exige d'être composé de tout ce que voici : la proposition (« protase »), l'exposition (« ecthèse »), la détermination (« diorisme ») , la construction (« kataskeuè »), la démonstration (« apodeixis »), et la conclusion (symperasma »). Parmi elles, la proposition dit quelle est, si une certaine chose est donnée, celle qui est cherchée. La proposition parfaite consiste en effet en ces deux choses. L'exposition reprenant à part et en elle-même la chose donnée, la prépare d'avance, en vue de la recherche. La détermination explique clairement à part ce qu'est précisément la chose cherchée. La construction ajoute ce qui manque à la chose donnée pour la découverte de la chose cherchée. La démonstration tire scientifiquement des choses admises l'inférence proposée. La conclusion retourne de nouveau à la proposition, en confirmant ce qui a été démontré »[1].

Pour mieux comprendre, nous allons suivre ensemble comment Euclide procède dans ses livres en disséquant la première proposition du premier livre :

Proposition :

« Sur une droite [limitée] donnée, construire un triangle équilatéral. »

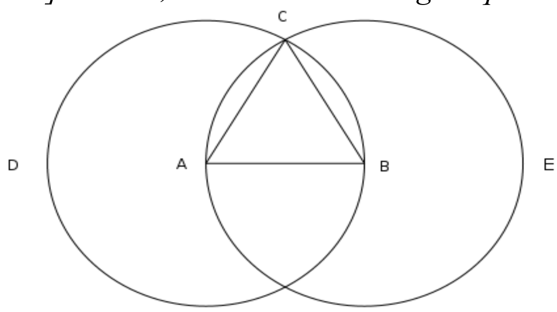


Figure 1

Exposition :

« Soit AB la droite limitée donnée. »

Elle établit les conditions, la situation, dans laquelle la proposition peut s'appliquer.

1 *Les éléments*, Volume I, Livres I-IV, traduction et interprétations par Bernard Vitrac des commentaire de Proclus , PUF, 1990, pages 137

Détermination :

« Il faut construire un triangle équilatéral sur la droite AB. »

La tradition euclidienne voulut faire une claire distinction entre la proposition et l'exposition-détermination. Contrairement à l'exposition-détermination, la proposition n'utilise aucune notation, et ceci pour être sûr de ne pas se perdre dans un cas particulier.

Construction :

« Que du centre A et au moyen de l'intervalle AB soit décrit le cercle BCD, et qu'ensuite du centre B, et au moyen de l'intervalle BA, soit décrit le cercle ACE, et que du point C auquel les cercles s'entrecoupent soient jointes les droites CA, CB jusqu'aux points A, B. »

La construction met en place tous les éléments dont la démonstration a besoin pour arriver à la conclusion.

Démonstration :

« Et puisque le point A est le centre du cercle CDB, AC est égale à AB ; ensuite, puisque le point B est le centre du cercle CAE, BC est égal à BA. Et il a été démontré que CA est égale à AB ; or les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles ; et donc CA est égale à CB ; donc les trois droites CA, AB, BC sont égales entre elles. »

Conclusion :

« Donc le triangle ABC est équilatéral et il est construit sur la droite limitée donnée AB. {Donc, sur une droite limitée donnée, un triangle équilatéral est construit.}[2] Ce qu'il fallait faire. »

Cette façon d'agencer les propositions et les démonstrations a été instaurée, et gardée durant des siècles en mathématiques, par souci de rigueur et pour bien montrer que l'on utilise un raisonnement déductif. Mais, vu par le regard d'un mathématicien contemporain, voire même d'un non-mathématicien, plusieurs détails paraissent troublants.

Tout d'abord, qu'apporte en plus la proposition à l'exposition-détermination ? Comme nous l'avons dit plus haut, elle permet de ne pas se perdre dans un cas particulier, lorsqu'on dessine une figure qui ne comprend pas toutes les possibilités qui sont en réalité considérées. A ceci peuvent s'ajouter deux autres raisons. Premièrement, avant la découverte de l'imprimerie ou de procédés similaires, l'ajout de figures dans les ouvrages, demandait un travail supplémentaire considérable. Il est difficile de savoir dans quelle mesure les ouvrages contenaient des figures avant les procédés d'imprimerie, mais qu'elles soient faites à la main ou non, cela comportait le risque qu'elles se déforment d'une copie ou d'une édition à l'autre. Même une fois que ces procédés aient fit leur apparition, il est bien évident que le fait de se limiter à du texte revenait bien moins cher. Aujourd'hui, les ouvrages mathématiques regorgent de figures précises et illustrant les différents cas possibles. Deuxièmement, d'un point de vue pédagogique, il est important que ceux qui sont amenés à lire ces traités gardent à l'esprit que les énoncés qui y sont écrits sont des énoncés généraux.

2 Les accolades ont été rajoutée par Vitrac

Autre fait troublant, les démonstrations de ces deux ouvrages sont certes très rigoureuses, n'utilisant que les axiomes et ce qui a été démontré précédemment, mais jamais il n'y a aboutissement à l'équivalence entre des propositions, comme nous pouvons entre autres le constater sur leur tableau déductif placé à la fin de ce mémoire. Nous allons d'ailleurs voir par la suite que, par exemple, dans *les Éléments* d'Euclide, la cinquième demande est équivalente aux propositions 29 et 32. Si nous regardons les théorèmes comme des pierres, la déduction de l'un d'entre eux à partir des précédents peut être vu comme le fait que cette nouvelle pierre vienne s'empiler sur les autres. Et plus la démonstration correspondante est rigoureuse, plus sa surface vient adhérer de manière parfaite avec celle des autres. Et l'équivalence de deux propositions peut être considérée comme du ciment qui vient souder les deux pierres ensemble montrant ainsi qu'elles ne sont en quelque sorte qu'une seule et même pierre, c'est-à-dire le même objet. Cette notion, qui n'est pas encore très présente à l'époque est pourtant capitale, elle permet d'identifier les objets et les notions. Par exemple, un objet peut être ainsi défini de plusieurs manières différentes, et suivant la situation dans laquelle on se trouvera, ce ne sera pas toujours la même définition qui sera la plus facile à démontrer.

2) A propos de la géométrie euclidienne

Le raisonnement déductif est d'autant plus efficace et utile que les axiomes qui lui servent de base sont cohérents et pertinents. En effet, la géométrie est un reflet de la réalité, et même si l'on suit un raisonnement rigoureux, si les axiomes ne se vérifient pas dans notre espace, il y a donc de fortes chances que les résultats obtenus non plus. Nous allons donc regarder ensemble ce qui sert de base dans ces deux ouvrages. Avant tout, nous allons essayer de comprendre comment les choses ont évolué en géométrie chez les Grecs. Commençons par nous intéresser aux Pythagoriciens.

L'école pythagoricienne était une communauté tant scientifique que religieuse fondée par Pythagore à Crotone en Italie vraisemblablement vers 520 avant J.C. Bien qu'essayant de s'extraire des modes de pensée de l'époque, les pythagoriciens s'inspirent des philosophes de la nature considérés comme étant les premiers philosophes de la Grèce antique. Philosophie, c'est à dire la pensée qui prend conscience d'elle-même et qui se prend elle-même pour objet, et qui prend également conscience de la nature parce que ces philosophes pensaient qu'il était possible de reconstruire le monde à partir d'un élément matériel. Le premier dont nous ayons entendu parler et qui intéressa grandement les pythagoriciens, nous allons voir pourquoi, fut Thalès de Milet qui lui pensait que l'eau était à l'origine de toute chose. [3]

La volonté première de cette école était la rupture entre la pensée et la chose pensée: il ne s'agissait plus, selon eux, pour la pensée de se laisser aller au vague des analogies sans fin, mais de produire le monde, le « Tout », à partir d'un principe. Par cette production, elle distingue la cause de l'effet : nous assistons, dans cette région du globe, à la naissance explicite du raisonnement. Le principe et le tout sont unis par la déduction, comme le maître et l'élève sont unis par une volonté commune.

3 Le monde de Sophie, Jostein Gaarder

Les Pythagoriciens n'ont eu d'une certaine manière comme principes premiers que le nombre et l'étendue, le nombre étant pour eux l'entier naturel. Certains mathématiciens du siècle dernier, tels que E. Frank et O. Neugebauer, estiment que la doctrine qu'Aristote leur associe « toute chose est nombre » n'apparait que plus tardivement et serait même plutôt due à Platon. Il est très difficile de dire exactement comment ont évolué les idées de cette école, car d'une part il ne reste que peu de leurs écrits (de Pythagore lui-même aucun) et d'autre part cette école était, en quelque sorte, une secte[4]. Par exemple, Hippase de Métaponte fit publiquement la construction du dodécaèdre régulier, ce qui fut considéré comme étant une divulgation criminelle des savoirs secrets pythagoriciens.

Nous avons une idée très imprécise de la géométrie pythagoricienne, mais nous pouvons supposer que, si elle existait, elle essayait certainement de coller à cette doctrine qu'Aristote lui associait. Ainsi, les géomètres de l'académie de Platon, fondée au début du quatrième siècle avant J-C, se sont certainement inspirés de ce concept pour construire leur géométrie et aboutir à l'écriture des *Éléments,* dont le dernier auteur serait Euclide selon Proclus. Comme nous l'avons dit, les Pythagoriciens pensaient que pour deux choses il existait toujours une unité indivisible commune, ce qui signifie en géométrie que toutes les longueurs seraient commensurables. Ceci a réfuté plus tard par la découverte de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du pentagone attribuée au Pythagoricien du nom d'Hippase de Métaponte au milieu du cinquième siècle avant J-C[5]. Il est assez amusant de remarquer que le pentagone était d'ailleurs le symbole de reconnaissance parmi les Pythagoriciens. Cette découverte qui fut capitale en mathématiques d'un côté et qui d'un autre remettait un de leurs principes fondamentaux en question, avait été constamment sous leur nez. Et nous pouvons penser que c'est pour prendre en considération cette découverte que la géométrie euclidienne utilise des droites ainsi que des cercles puisque le pentagone est constructible à la règle et au compas comme on peut le voir dans la figure 2.

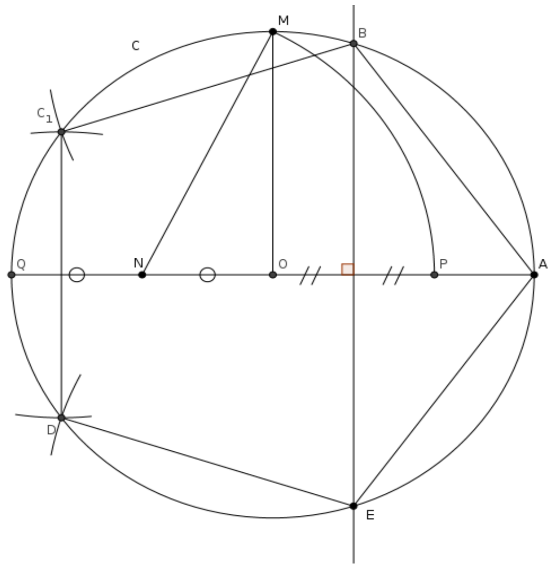


Figure 2

4 Dans le sens actuel

5 The Discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum, Kurt von Fritz, Annals of Mathematics

Regardons brièvement la démonstration de l'incommensurabilité du côté et de la diagonale du pentagone qui nous a été rapportée :
Si ces deux longueurs étaient commensurables, le procédé qui consiste : à retrancher la plus petite à la plus grande, garder cette nouvelle longueur et la plus petite, et ainsi de suite jusqu'à obtenir la longueur nulle... aboutirait. En effet, si elles sont commensurables, elles ont une mesure commune, à elles deux elles contiennent un nombre fini de fois cette mesure, et en retranchant une à l'autre, à chaque itération, on retire un certain nombre de mesures communes. Nous construisons ainsi une suite d'entiers décroissante minorée par zéro, donc qui converge. De plus, tant qu'elle n'est pas nulle, la décroissance est stricte, elle est alors stationnaire en zéro.
« *Soit le pentagone ABCDE et ses diagonales, qui déterminent le nouveau pentagone A'B'C'D'E'.*
On a les égalités :
AE = AB', B'D = B'E'
d'où il suit : AD – AE = B'E' ;
d'autre part : AE = ED' = EA', B'E' = B'D = B'E,
d'où il suit : AE – B'E4 = B'A'.

Le processus pouvant être itéré, si l'on trace les diagonales du pentagone A'B'C'D'E' qui déterminent un troisième pentagone plus petit, et ainsi de suite, on aura en appelant D les diagonales et C les côtés :
$D_1 - C_1 = D_2$
$C_1 - D_2 = C_2$
$D_2 - C_2 = D_3$
...
$D_n - C_n = D_{n+1}$
$C_n - D_{n+1} = C_{n+1}$
... indéfiniment. »[6]

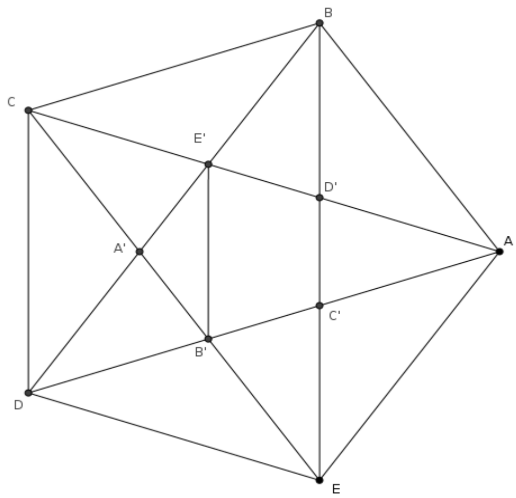


Figure 3

6 *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la science grecque III : l'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*, Maurice Caveing, 1998

Pour nous donner une meilleure idée de ce que sont les nombres constructibles à la règle et au compas, considérons le dessin ci-dessous qui montre comment obtenir la racine d'un entier naturel *n*, à l'aide de la règle et du compas, c'est-à-dire de droites et de cercles.

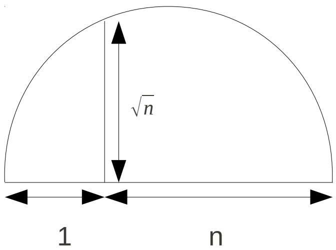


Figure 4

D'un point de vue actuel, nous savons actuellement que même en considérant les nombres rationnels ainsi que les racines carrées successives, c'est à dire seulement certains nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$, ce que l'on appelle aujourd'hui une extension de corps algébrique, notre nouveau corps n'est pas encore algébriquement clos – les nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ n'y sont pas encore tous inclus – et il n'est pas non plus complet – certaines suites dont tous les termes sont inclus dans notre espace n'y ont pas leurs limites ; en d'autres termes, les suites de Cauchy ne sont pas toutes convergentes.

3) Définitions :

Les *Éléments* décrivent et définissent d'une manière très précise chacun des objets utilisés dans la géométrie euclidienne. Chacune de ces définitions pourrait être disséquée et étudiée mais ce n'est pas le but de ce mémoire. Nous aurons besoin par la suite de savoir exactement ce que sont les différents objets que nous manipulons ; il est donc utile de rappeler comment Euclide les définit :

« 1. Un point est ce dont il n'y a aucune partie.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les limites d'une ligne sont des points.
4. Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.
5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
6. Les limites d'une surface sont des lignes.
7. Une surface plane est celle qui est placée de manière égale par rapport aux droites qui sont sur elle.
8. Un angle plan est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite.
9. Et quand les lignes contenant l'angle sont droites, l'angle est appelé rectiligne.
10. Et quand une droite, ayant été élevée sur une droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles égaux est droit, et la droite qui a été élevée est appelée perpendiculaire à celle sur laquelle elle a été élevée.
11. Un angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.
12. Un angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit.
13. Une frontière est ce qui est limite de quelque chose.
14. Une figure est ce qui est contenu par quelque ou quelques frontière(s).
15. Un cercle est une figure plane contenue par une ligne unique {celle appelée circonférence} par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont {jusqu'à la circonférence du cercle} égales entre elles.
16. Et le point est appelé centre du cercle.
17. Et un diamètre du cercle est n'importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales.
18. Un demi-cercle est la figure contenue par le diamètre et la circonférence découpée par lui ; le centre du demi-cercle est le même que celui du cercle.
19. Les figures rectilignes sont les figures contenues par des droites ; trilatères : celles qui sont contenues par trois droites, quadrilatères par quatre ; multilatères par plus de quatre.
20. Parmi les figures trilatères est un triangle équilatéral celle qui a les trois côtés égaux ; isocèle celle qui a deux côtés égaux seulement ; scalène celle qui a les trois côtés inégaux.
21. De plus, parmi les figures trilatères est un triangle rectangle celle qui a un angle droit ; obtusangle, celle qui a les trois angles obtus ; acutangle, celle qui a les angles aigus.
22. Parmi les figures quadrilatères est un carré celle qui est à la fois équilatérale et rectangle ; est oblongue celle qui est rectangle mais non équilatérale ; un losange, celle qui est équilatérale mais nonrectangle ; un rhomboïde, celle qui a les côtés et les angles opposés égaux les uns aux autres mais qui n'est ni équilatérale ni rectangle ; et que l'on appelle trapèzes les quadrilatères autres que ceux-là.
23. Des droites parallèles sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre. »[7]

7 *Les éléments*, op. cit., p. 151

Nous aurons besoin également des définitions des *Sphèriques* de Théodose de Tripolis :

« I. La sphère est une figure solide comprise sous une surface unique, à la rencontre de laquelle toutes les droites, tombant d'un seul des points situés à l'intérieur de la figure, sont égales entre elles.
II. Le point qui est tel est d'ailleurs le centre de la sphère.
III. D'autre part, le diamètre de la sphère est une droite menée par le centre, et terminée de part et d'autre à la surface de la sphère ; droites fixe autour de laquelle la sphère tournera.
IV. Les pôles de la sphère sont les extrémités de l'axe.
V. Le pôle d'un cercle situé dans la sphère est un point à la surface de la sphère, d'où toutes les droites qui tombent sur la circonférence de ce cercle sont égales entre elles.
VI. Un plan est dit incliné sur un plan d'une manière semblable à un autre sur un autre, lorsque les droites menées à un angles droites sur la section commune des plans, aux mêmes points dans chacun des plans, comprennent des angles égaux. »[8]

Ménélaüs, quant à lui, n'énonce que très peu de définitions. Cela est dût au fait qu'il s'appuie sur celles de d'Euclide et de Théodose de Tripoli qui lui a déjà établi quelques théorèmes sur la géométrie sphérique. Il estime certainement que celles de celui-ci lui conviennent :

« 1. Celle des figures sur la surface de la sphère, que j'appelle trilatère est celle que trois arcs de grands cercles contiennent, où chacun de ces arcs est plus petit qu'un demi-cercle.
2. Ses angles sont ceux que ces arcs-là contiennent pour que il résulte la même surface triangulaire et que les arcs donnés la contiennent.
3. Les angles que j'appelle angles égaux contenus par des arcs de grands cercles sont ceux pour lesquels les arcs d'inclinaison de leurs demi-cercles respectifs sont égaux, c'est-à-dire l'arc du cercle qui passe par les pôles des deux cercles et contenu par les deux demi-cercles.»[9]

La dernière de ces définitions mérite quelques explications que nous apporterons dans la deuxième partie.

8 *Les Sphériques de Théodose de Tripoli,* Traduction de Ver Eecke, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1959
9 Traduction de *Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der verbesserung von Abū Nasr Mansūr B. 'Ali b. 'Irăq, Max KRAUSE*, Weidmannsche Buchhandlung, 1936, p. 128 p.118

4) Les notions communes de la géométrie euclidienne

Euclide distingue deux types d'axiomes : les notions communes et les demandes. Les notions communes relèvent plutôt de la logique, elles définissent des relations vraies dans toutes les sciences, tandis que les demandes représentent, quant à elles, les axiomes concrets régissant ainsi les relations que les objets géométriques définis plus haut peuvent avoir entre eux. Elles ont en commun qu'elles sont estimées comme indémontrables. Considérons tout d'abord les notions communes d'Euclide :

«1. Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.
2. Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.
3. Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.
4. {Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont inégaux.
5. Et les doubles du même sont égaux entre eux.
6. Et les moitiés du même sont égales entre elles.}[10]
7. Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.
8. Et le tout est plus grand que la partie.
9. {Et deux droites ne contiennent pas une aire.} »[11]

Les trois premières pourraient se traduire respectivement dans un langage moderne par la transitivité de la relation d'égalité définie entre les objet de même nature et sa compatibilité avec l'addition et la soustraction. Les trois suivantes ne sont autres que des formes réciproques des précédentes. Cela définit les « opérations » possibles entre les objets.

Les notions communes 7 et 8 sont, quant à elles, plus de l'ordre géométrique tout en restant bien dans ce cadre de logique entre objets. La première permet *« simplement la superposition des figures et leur égalité »*[12] en particuliers celle des triangles. Nous verrons dans la deuxième partie de ce mémoire l'importance de celle-ci. En ce qui concerne la seconde, Vitrac prouve qu'Euclide l'utilise toujours *« en rapport avec les formules stéréotypées qui rappellent l'incompatibilité des trois cas possibles : <, >, = »*[13]. Euclide utilisera à 17 reprises cette incompatibilité dans des raisonnements par l'absurde, en donnant dans la plupart des cas comme justification : « *donc le plus petit est égal au plus grand ; ce qui est absurde* ».

La position des différentes notions communes n'a pas toujours été celle que nous venons de citer. Tout d'abord, Vitrac a placé les notions communes 4, 5, 6 et 9 entre accolades parce que Proclus les avait expressément rejetées. Tandis que des auteurs d'autres exemplaires, jugés parfois même bien meilleurs que la version de Proclus, les avaient laissés. Ensuite, la notion commune 9 a été considérée, par exemple par an-Nayrizi, comme la sixième demande et, à juste titre, puisque d'une part, elle ne concerne qu'un seul type d'objet, les droites qui, contrairement aux autres notions communes, comme le dit leur nom, s'appliquent à plusieurs sciences. D'autre part elle est un fondement essentiel à la géométrie euclidienne, elle est utilisée à partir de la proposition 4 elle-même fondamentale à toute cette théorie.

10 Ces notions communes avaient été enlevées par Proclus qui les jugea inutiles
11 *Les éléments, op. cit.,* p. 151-166
12 *Les éléments, op. cit.,* p. 182
13 *Les éléments, op. cit.,* p. 183

En ce qui concerne la géométrie de Ménélaüs, les 8 premières notions communes sont vérifiées, ce qui n'est pas surprenant puisqu'elles sont censées rester générales. Par contre, on se rend vite compte que sur la sphère, en considérant les grands cercles, c'est-à-dire les cercles ayant le même centre que celle-ci, en tant que droites, deux droites distinctes contiennent toujours une aire. On peut s'en convaincre à l'aide de la figure ci-dessous.

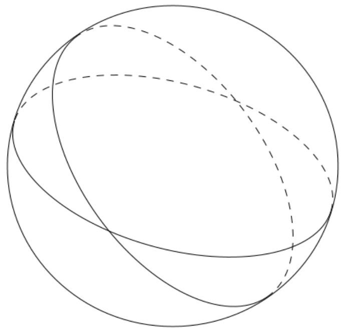


Figure 5

Pour nous rendre compte de l'importance de cette notion et de son influence sur la géométrie que l'on considère, et pour savoir si elle est vérifiée ou non, nous allons comparer la proposition 16 des *Éléments,* qui utilise la quatrième demande, avec la proposition 10 du premier livre des S*phériques* de Ménélaüs.

Ces deux théorèmes se basent pourtant sur la proposition suivante qui est vraie dans nos deux géométries :

« Dans tout triangle, le côté le plus grand sous-tend l'angle le plus grand. »[14]

Regardons maintenant les deux propositions que nous allons étudier :

Proposition 10 du premier Livre des *sphériques* de Ménélaüs :

« Si deux côtés d'une figure trilatère sont plus petits qu'un demi-cercle, alors parmi les deux angles adjacents au côté restant, l'angle extérieur à ce côté est plus grand que l'angle intérieur et opposé, et si les deux côtés sont plus grand qu'un demi-cercle, alors l'angle extérieur est plus petit que l'angle intérieur et opposé, et si les deux côtés sont égaux à un demi-cercle, alors l'angle extérieur est égal à l'angle intérieur et opposé.

Soit une figure trilatère ABG dont les côtés AB, BG soient plus petits qu'un demi-cercle. Alors je dis que l'angle BGD est plus grand que l'angle BAG.[...]

Et à nouveau, il est clair que si les deux arcs AB, BG sont égaux à un demi-cercle, [...] l'angle BAG est égal à l'angle BGD.

Et à nouveau, si les deux arcs AB, BG sont plus grands qu'un demi-cercle, alors l'angle BDG est plus grand que l'angle BGD. »[15]

14 Théorème 9 du premier livre de Ménélaüs et proposition 18 du premier livre des éléments d'Euclide
15 *Die Sphärik, op. cit.,* p. 128

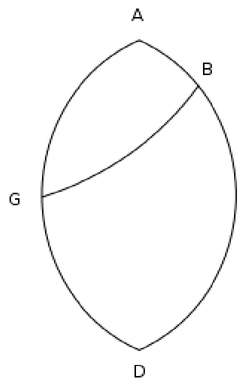


Figure 6

Proposition 16 du premier livre des *Éléments* d'Euclide :

« Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés.

Soit le triangle ABC.

Je dis que l'angle extérieur, celui sous ACD, est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés, ceux sous CBA, BAC.»

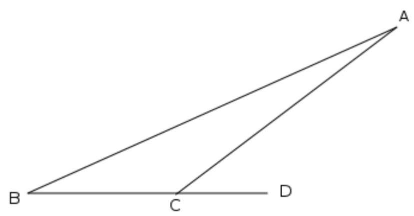


Figure 7

Démonstration de la proposition 10 du premier livre des *Sphériques* de Ménélaüs :

« Soit une figure trilatère ABG dont les côtés AB, BG soient plus petits qu'un demi-cercle. Alors je dis que l'angle BGD est plus grand que l'angle BAG.

En effet, nous complétons les deux arcs ABD, AGD de sorte que chacun des deux arcs est un demi cercle. Comme les deux côtés AB, BG sont plus petits qu'un demi-cercle, ils sont plus petits que l'arc ABD. {En soustrayant l'arc AB} l'arc BD restant est plus grand que l'arc BG. Par conséquent, l'angle BDG qui est égal à l'angle BAG est plus petit que l'angle BGD, d'après ce qui a été montré dans le théorème 9.

Et à nouveau, si les deux arcs AB, BG sont supposés plus grands qu'un demi-cercle, alors l'arc BG est plus grand que l'arc restant BD. Par conséquent, l'angle BDG qui est égal à l'angle BAG est plus grand que l'angle cité BGD.

Et à nouveau il est clair que si les deux arcs AB, BG sont égaux à un demi-cercle, alors l'arc BG est égal à l'arc BD. Par conséquent l'angle BAG est égal à l'angle BGD, d'après ce qui a été démontré dans le théorème 2.

Et la réciproque de ce que nous avons dit sera pareillement démontré de cette manière. En effet, si l'angle BGD est égal à l'angle BAG, alors {l'argument} précédent montre que la somme BA, BG est égale à un demi-cercle. Et si l'angle extérieur BGD est plus petit que l'angle intérieur et opposé, alors on montre par analogie de {l'argument} précédent que AB, BG sont ensemble plus grands qu'un demi-cercle ; car l'angle BDG est plus grand que l'angle BGD, par conséquent l'arc BD est plus petit que l'arc BG.

Et à nouveau, si l'angle BGD est plus grand que l'angle BAG, il est plus grand que BDG. Par conséquent BD est plus grand que BG. Ainsi la somme BA, BG est plus petite qu'un demi-cercle. Et c'est ce que nous voulions démontrer. »[16]

Tout d'abord, on remarque qu'il parle d'un point D sans que celui-ci soit défini. On comprend par la suite qu'il s'agit du point antipodal à A puisque deux méridiens se coupent en deux points antipodaux.

Une erreur semble apparaître dans la démonstration. Si l'on prend par exemple la première partie, il déduit de l'hypothèse $AB+BG<\pi$ que $BD>BG$, et ensuite on a l'impression qu'il oublie de différencier les cas où BD est plus grand ou plus petit que GD, puisque la proposition 9 sur laquelle il s'appuie dit : *« Le côté le plus grand de chaque figure trilatère sous-tend le plus grand angle.»* Ce qui est exprimé dans un langage mathématique ancien. Il faut interpréter cette proposition de la manière suivante : si dans un triangle un côté est plus grand qu'un autre, alors l'angle sous-tendu par le premier côté est plus grand que l'angle sous-tendu par le second côté. La première formulation ne nous semble pas du tout naturelle, bien qu'à l'époque tous les textes mathématiques fussent écrits de cette manière et compréhensibles de tout mathématicien. Il faut donc faire très attention aux anciennes formulations et à ne pas mal les interpréter.

Cette proposition 10 ne fait appel pratiquement qu'à la proposition 9 citée plus haut qui, elle, est également vraie dans la géométrie euclidienne. On peut donc en conclure qu'il y a, à ce niveau, une divergence flagrante qui s'effectue. Et cette différence est due au fait que dans la sphère de Ménélaüs deux droites se coupent deux fois en deux points antipodaux et qu'en ces deux points nos deux droites forment des angles égaux, alors que dans la géométrie euclidienne d'après la 9ème notion commune des *Éléments* :

« Deux droites ne contiennent pas une aire ».

16 *Die Sphärik, op. cit.,* p. 128

En conclusion, la géométrie de Ménélaüs se détache de la géométrie d'Euclide déjà à cause de la notion commune 9 (qui apparaît souvent comme la 6ème demande).

5) Les quatre premiers postulats de la géométrie euclidienne

Cette volonté de la géométrie euclidienne à ne vouloir se baser que sur les droites et les cercles lui valut le surnom de « géométrie à la règle et au compas ». On retrouve cela dans les trois premiers postulats des *Éléments* d'Euclide :

« 1) Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.
2) Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.
3) Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle. »[17]

Ménélaüs ne fait aucune allusion aux demandes dans ses trois livres, mais il est clair en considérant la manière avec laquelle il a construit son espace que les trois premières sont réalisées : Il existe un unique grand cercle passant par deux points donnés de la sphère à moins qu'ils ne soient antipodaux. En effet, un grand cercle contenant ces deux points appartient à l'unique plan contenant ces deux points et le centre de la sphère, c'est donc l'intersection de la sphère avec ce plan (Cf Figure ci-dessous). Un segment, en tant que arc de grand cercle est prolongeable en un unique grand cercle.

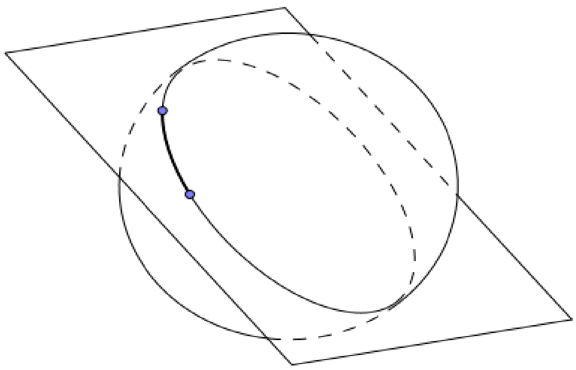


Figure 8

A ceux-là s'ajoute le quatrième axiome qui, lui contrairement aux trois premiers, ne regarde pas la construction, mais la propriété d'un objet :

« 4) Et que tous les angles droits soient égaux entre eux. »[18]

17 *Les éléments*, op. cit., p. 167-169
18 *Les éléments, op. cit.,* p. 173

Au premier abord, cette assertion peut sembler déroutante si l'on ne voit pas ce qui se cache derrière. Il faut la considérer comme un étalonnage des angles. Les lignes droites étant définies, l'angle le plus naturel est l'angle plat, et, par définition (Déf. 10), si l'on élève une droite sur une autre faisant des angles égaux, alors ce sont des angles droits. Et, d'après Vitrac, le fait de « demander » qu'ils soient tous égaux suppose deux propriétés essentielles à notre espace, d'une part l'invariabilité des figures par déplacement, et d'autre part l'homogénéité de cet espace. On remarque que sur la sphère, ces deux propriétés sont vérifiées, puisqu'elle est invariante par les différentes rotations de centre le centre de la sphère. Le quatrième postulat est donc également vérifié sur la sphère de Ménélaüs.

6) Validité du cinquième postulat sur la sphère de Ménélaüs et ses conséquences

a) Énoncés :

Enfin, considérons le cinquième postulat de la géométrie euclidienne, celui qui fit tant parler de lui et qu'on appelle plus communément « le postulat des parallèles » :

« 5) Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles inférieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits. »

Cette appellation est due à une formulation équivalente et plus simple, appelée « axiome de Playfair », qui en a été fait par la suite :

« Par un point situé hors d'une droite, on peut mener une unique droite qui ne la rencontre pas. »

Il est évident qu'il ne vaut pas dans la géométrie de Ménélaüs puisque deux grands cercles sont toujours sécants en deux points antipodaux, et ne sont, par conséquent, jamais parallèle.

Pour nous rendre compte des conséquences que cela peut entrainer, nous devrons tout d'abord nous intéresser aux propositions 29 et 32 des *Éléments* dont la première en est la contraposée et dont la seconde lui est équivalente. Nous avons besoin de faire cette démarche car la notion de droites parallèles[19] selon la définition 23 des *Éléments* existe dans la sphère de Ménélaüs mais est vide et n'apparaît donc pas dans les théorèmes de son livre. Et en constatant que la proposition 32 est équivalente à la cinquième demande, nous remarquerons qu'elle est en totale contradiction avec la proposition 11 des *Sphériques* de Ménélaüs. Considérons donc leurs énoncés respectifs :

19 Nous utilisons quelquefois le terme de parallèles pour désigner les cercles de la sphère qui ne sont pas des grands cercles, c'est-à-dire qui sont des cercles dans la géométrie de la sphère de Ménélaüs. Sur notre sphère, il ne faut donc pas confondre, les parallèles et les droites parallèles.

Proposition 29 du 1er livre d'Euclide :

« Une ligne droite tombant sur des droites parallèles fait des angles alternes égaux entre eux, et aussi l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits.

En effet, que la droite EF tombe sur les droites parallèles AB, CD. Je dis qu'elle fait des angles alternes égaux : ceux sous AGH, GHD, et l'angle extérieur, celui sous EGB, égal à celui sous GHD, intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté, ceux sous BGH, GHD, égaux à deux droits. »

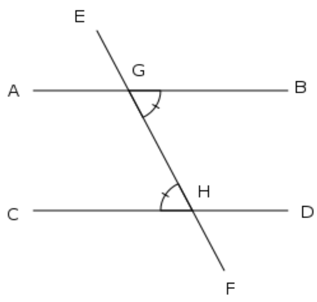


Figure 9

Proposition 32 du 1er livre d'Euclide :

« Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits

Soit le triangle ABC, et qu'un de ses côtés, BC, soit prolongé au-delà jusqu'en D. Je dis que l'angle extérieur, celui sous ACD, est égal aux deux angles intérieurs et opposés, ceux sous CAB, ABC, et que les trois angles intérieurs du triangle, ceux sous ABC, BCA, CAB, sont égaux à deux droits.»

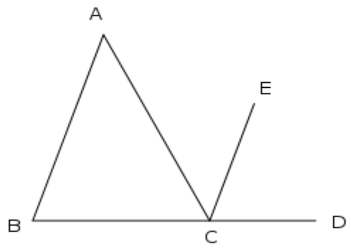


Figure 10

Proposition 11 des *Sphériques* de Ménélaüs :

« L'angle extérieur de toute figure trilatère est plus petit que les deux angles intérieurs qui lui sont opposés.

Soit ABG trilatère et soit AG prolongé jusqu'en D. Alors je dis que l'angle extérieur BGD est plus petit que les deux angles opposés en les deux points A, B. »

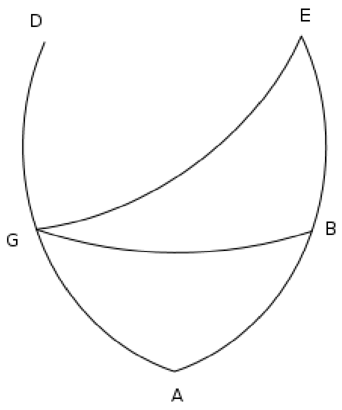


Figure 11

Ménélaüs ne précise pas s'il s'agit d'une inégalité stricte ou large, mais chez les Grecs, plus petit signifie vraiment plus petit, c'est-à-dire de manière stricte. On peut également remarquer que plus le triangle est petit, plus la différence avec le plan est ténue, et plus nous nous rapprochons de l'égalité.

b) Équivalence entre la proposition 29 et la cinquième demande :

Essayons de comprendre en quoi la proposition 29 est équivalente à la cinquième demande. Avant toute chose, regardons comment Euclide définit le parallélisme :

Définition 23 du premier livre d'Euclide :

« Des droites parallèles sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre. »

Il est intéressant de remarquer que cette définition est la dernière des Éléments et le postulat des parallèles est le dernier des postulats (ou l'avant-dernier si l'on considère la notion commune 9 comme un postulat), comme si Euclide avait voulu les mettre à l'écart. Les cas d'égalité des triangles tenant une place majeure dans son ouvrage, nous pouvons penser ou bien qu'il a voulu faire cette séparation afin de bien mettre en évidence que ceux-ci n'ont nul besoin du postulat des parallèles ou bien qu'il avait conscience de l'existence d'un problème, mais sans arriver à le résoudre. On voit par exemple que certainement par souci de rigueur, il essaya de s'appuyer le moins possible sur le postulat des parallèles ; il n'est utilisé pour la première fois que dans la proposition 29.[20]

20 Cf schéma sur la théorie des parallèles à la fin des annexes de ce mémoire

Regardons ensuite comment Euclide démontre la proposition 29 du premier livre des éléments :

«En effet, si celui sous AGH est inégal à celui sous GHD, l'un d'entre eux est plus grand. Que celui sous AGH soit le plus grand. Que celui sous BGH soit ajouté de part et d'autre. Ceux sous AGH, BGH sont donc plus grands que ceux sous GHD, BGH. (N.C.4). Mais ceux sous AGH, BGH sont égaux à deux droits (Prop. 13). Donc ceux sous BGH, GHD sont plus petits que deux droits. Les droites sur des angles plus petits que deux droits, prolongées indéfiniment, se rencontrent (Dem. 5).

Donc les droites AB, CD, prolongées indéfiniment, se rencontreront. Or elles ne se rencontrent pas, puisqu'elles ont été supposées parallèles. Donc l'angle sous AGH n'est pas inégal à l'angle sous GHD. Donc il est égal. Mais celui sous AGH est égal à celui sous EGB (Prop. 15) et donc celui sous EGB est égal aussi à celui sous GHD (N.C. 1).

Que celui sous BGH soit ajouté de part et d'autre. Ceux sous EGB, BGH sont donc égaux à ceux sous BGH, GHD (N.C. 2). Mais ceux sous EGB, BGH sont égaux à deux droits (Prop. 13). Et donc ceux sous BGH, GHD sont égaux à deux droits (N.C. 1).

Donc une ligne droite tombant sur des droites parallèles fait des angles alternes égaux entre eux, et aussi l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits. Ce qu'il fallait démontrer. »

Prenons comme hypothèses les définitions, les quatre premières demandes et les 8 premières notions communes du premier livre des Éléments. La démonstration ci-dessus montre clairement que la cinquième demande implique la proposition 29, puisque les propositions qui y sont utilisées sont des conséquences de nos hypothèses. Nous avons donc le sens direct.

Maintenant, en ce qui concerne le sens indirect, si l'on suppose que la proposition 29 est vraie, considérons la situation dans laquelle le cinquième postulat s'applique, c'est-à-dire :

Soit une droite EF tombant sur deux droites AB, CD faisant les angles intérieurs et du même côté BGH, DHG[21] plus petits que deux droits pris ensemble. Supposons les deux droites AB, CD indéfiniment prolongées, et qu'elles ne se rencontrent pas du côté où sont les angles plus petits que deux droits. Supposons maintenant qu'elles se rencontrent de l'autre côté, c'est-à-dire du côté de A.

Or, d'après la proposition 13 :

« si une droite élevée sur une droite produit des angles, elle produit deux angles soit droits, soit égaux à deux droits »

Ainsi les angles intérieurs produits de l'autre côté, à savoir AGH, CHG seront eux pris ensemble plus grands que deux droits. Menons maintenant la parallèle IJ à CD en G, à l'aide de la proposition 31 énoncée ci-dessous. D'après la proposition 29, IGH, CHG font ensemble deux droits, l'angle AGH est donc plus grand que l'angle IGH, la droite AG se trouve alors au-dessus de la droite IG par rapport à CH, au moins au début, IG et CH n'étant pas sécantes, AG coupera donc IG du côté de A, d'après l'axiome de Pasch :

« Soient A, B, et C trois points non alignés et a une droite du plan ABC qui ne passe par aucun des points A, B et C ; si la droite a passe par l'un des points du segment AB, elle passe ou par un point du segment BC ou par un point du segment AC. »[22], plus simplement, si une droite entre dans un triangle elle en sort. Bien qu'Euclide utilise implicitement cet axiome dans les Éléments, il n'est clairement énoncé que très tardivement.

21 En reprenant les notation de la proposition 29 d'Euclide

22 L'ouvrage de D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, traduction française de P. Rossier. Paris, Dunod, 1971

Or, d'après la N.C. 9 :

« Deux droites ne contiennent pas une aire »

Nous avons donc une contradiction. AG et CH sont ainsi non sécantes et AB, CD sont parallèles. En appliquant la proposition 29, nous obtenons une contradiction avec le fait que BGH, DHG sont ensemble plus petits que deux droits. Par conséquent, AB, CD sont sécantes du côté de nos deux angles BGH, DHG. Nous obtenons donc une équivalence entre le cinquième postulat et la proposition 29.

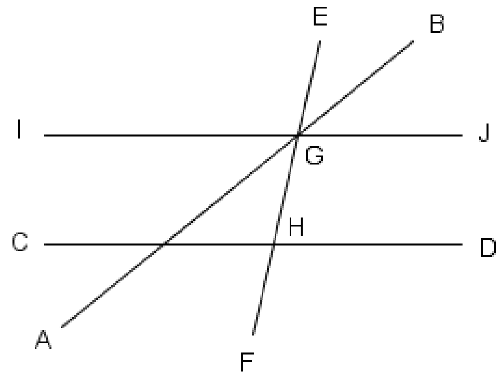


Figure 12

c) Équivalence entre la proposition 32 et la cinquième demande :

La démonstration de la proposition 32 utilise la proposition 31 qui est la construction d'une parallèle particulière à une droite.

Proposition 31:

« Par un point donné, mener une droite parallèle à une droite donnée.
Soit, d'une part, le point donné A, d'autre part, la droite donnée BC. Il faut alors, par le point A, mener une droite parallèle à la droite BC.»

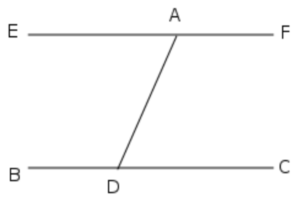


Figure 13

Si l'on regarde de près la démonstration, on se rend compte qu'elle ne fait appel ni à la proposition 29, ni à la cinquième demande :

Démonstration :

« Soit, d'une part, le point donné A, d'autre part, la droite donnée BC. Il faut alors, par le point A, mener une droite parallèle à la droite BC.

Que soit pris au hasard , un point D sur BC et que AD soit jointe (Dem. 1). Et, sur la droite DA, et au point A qui est sur elle, que soit construit, égal à l'angle sous ADC, celui sous DAE (Prop. 23). Et que la droite AF soit le prolongement en ligne droite de EA.

Et puisque la droite AD, tombant sur les deux droites BC, EF a fait les angles alternes, ceux sous EAD, ADC, égaux entre eux, EAF est donc parallèle à BC (Prop. 27).

Donc, par le point donné A, la droite EAF a été menée, parallèle à la droite donnée BC. Ce qu'il fallait faire. »

Avant la proposition 29, aucune autre ne fait appel au postulat des parallèles, et la proposition 31 n'utilise aucun des deux.

Penchons nous maintenant sur la démonstration de la proposition 32 :

Démonstration :

« En effet, que par le point C, soit menée CE parallèle à la droite AB (Prop. 31).

Puisque AB est parallèle à CE et que AC tombe sur elles, les angles alternes, ceux sous BAC, ACE sont égaux entre eux. Ensuite, puisque AB est parallèle à CE et que la droite BD tombe sur elles , l'angle extérieur, celui sous ECD, est égal à celui sous ABC, intérieur et opposé (Prop. 29). Et il a été aussi démontré que celui sous ACE est égal à celui sous BAC. L'angle tout entier sous ACD est donc égal aux deux angles intérieurs et opposés, ceux sous BAC, ABC (N.C. 2).

Que soit ajouté de part et d'autre celui sous ACB. Ceux sous ACD, ACB sont égaux aux trois sous ABC, BCA, CAB. Mais ceux sous ACD, ACB sont égaux à deux droits (Prop. 13) ; donc ceux sous ABC, BCA, CAB sont aussi égaux à deux droits (N.C. 1).

Donc, dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits. Ce qu'il fallait démontrer. »

Il est donc clair que la proposition 32 découle de la proposition 29. Il ne nous reste plus que la réciproque. Puisque maintenant nous savons que la 5ème demande est équivalente à la proposition 29, il nous reste à montrer que la proposition 32 implique la cinquième demande.

Soit, donc, une droite EF tombant sur deux droites AB, CD faisant les angles intérieurs et du même côté, à savoir AGH et GHC, plus petits que deux droits.

Alors je dis queles deux droites AB, CD, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

Considérons un point quelconque I sur la droite CD distinct de H. Il nous est possible que construire un angle rectiligne sur CD au point I égal à l'angle rectiligne valant la différence entre deux droits et les deux angles AGH et GHC (Prop. 23)[23]. Deux cas se présentent : soit cette droite est parallèle à la droite EF, soit elles sont sécantes.

a) Supposons qu'elles soient parallèles, et que la droite ainsi construite coupe la droite AB en J, comme sur la figure ci dessous.

Alors, puisque les trois angles intérieurs d'un triangle sont égaux à deux droits, les quatre angles intérieurs du quadrilatère GHIJ sont, eux égaux à quatre droits. Ainsi, l'angle IJG est égal à deux droits, et les droites IJ et AB sont égales. Par conséquent, les droites AB et CD sont sécantes en I.

23 Prop. 23 : Sur une droite, et en un point sur elle, construire un angle rectiligne égal à un angle rectiligne donné.

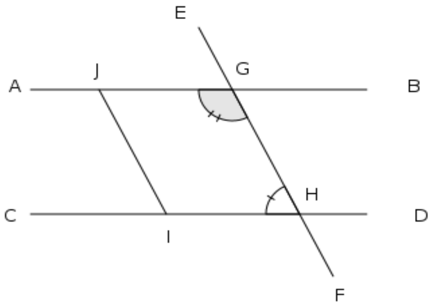


Figure 14

b) Supposons maintenant que la droite construite coupe la droite EF en J (Cf Figure ci-dessous). De la même manière, l'angle IJH est égal à l'angle AGH (Prop. 32). Les droites IJ et AB sont donc parallèles (Prop. 28)[24]. On en déduit que si les droites AB et CD sont parallèles, les droites IJ et CD le sont aussi (Prop. 30) [25]ce qui n'est pas le cas puisqu'elles sont sécantes en I. Les droites AB et CD sont alors sécantes.

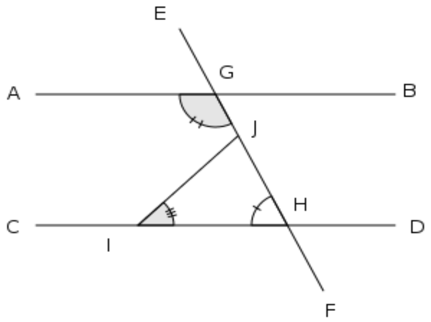


Figure 15

Si elles sont sécantes du côté des points B et D en un point K (Cf Figure ci-dessous), puisque les angles intérieurs du triangle GHK seraient égaux à deux droits (Prop. 32), les angles AGH et KGH seraient égaux à deux droits, et les angles CHG et KHG sont égaux à deux droits, alors les angles AGH et CHG seraient égaux à deux droits et GKH, ce qui contredit les hypothèses. Alors les droites AB et CD sont sécantes du côté où les angles intérieurs formés avec la droite EF sont plus petits que deux droits. Ce qu'il fallait démontrer !

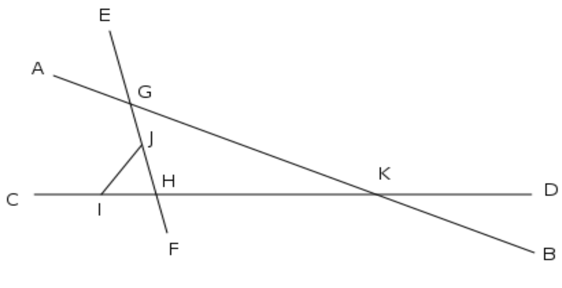


Figure 16

24 Prop. 28 : Si une droite tombant sur deux droites fait l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé du même côté, ou les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits, les droites seront parallèles l'une à l'autre.
25 Prop. 30 : Les parallèles à une même droite sont aussi parallèles l'une à l'autre.

II Cas d'égalité des triangles :

1) Histoire et pédagogie :

Les Grecs avaient senti que le mouvement dans la géométrie posait problème, et le mirent tout simplement de côté. Euclide, dans les Éléments, utilisera la superposition telle qu'elle est évoquée dans la Notion commune 7, *« Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles. »* Et jusqu'à très tard, la géométrie qui était enseignée restait très proche de celle des Grecs. En particulier, on utilisait le postulat des parallèles et on étudiait le cas d'égalité des triangles.

Au fil de l'histoire, la recherche en mathématiques a avancé, de manière plus ou moins rapide selon les époques, sans que l'enseignement soit toujours réadapté en conséquence. Deux grandes réformes dans l'enseignement des mathématiques voulurent rattraper ce retard : la réforme de 1902 et celle de 1970, cette dernière étant appelée plus communément la réforme des mathématiques modernes.

En ce qui concerne la réforme de 1902, ses auteurs s'attaquèrent, en géométrie, principalement à deux points. Le premier a été d'essayer de résoudre ce problème du mouvement en introduisant les translations et les rotations pour construire la géométrie élémentaire, ce qui a eu pour effet de faire disparaître l'étude des cas d'égalité des triangles et de ne plus utiliser le postulat des parallèles. Et le deuxième a été de fusionner la géométrie plane avec la géométrie de l'espace qui, elle, a été moins explorée que celle du plan chez les Grecs. Le postulat des parallèles permet de démontrer principalement les théorèmes de Pythagore et Thalès ; à la place on utilisa les aires (Cf figure ci-dessous), alors que celles-ci sont établies à l'aide du postulat des parallèles. Le problème des parallèles ne fut que repoussé plus loin sans le résoudre et la clef de ce problème ne fut plus mise à disposition. Cette réforme fut abandonnée en 1923, dont il ne resta principalement en géométrie que l'étude des transformations.

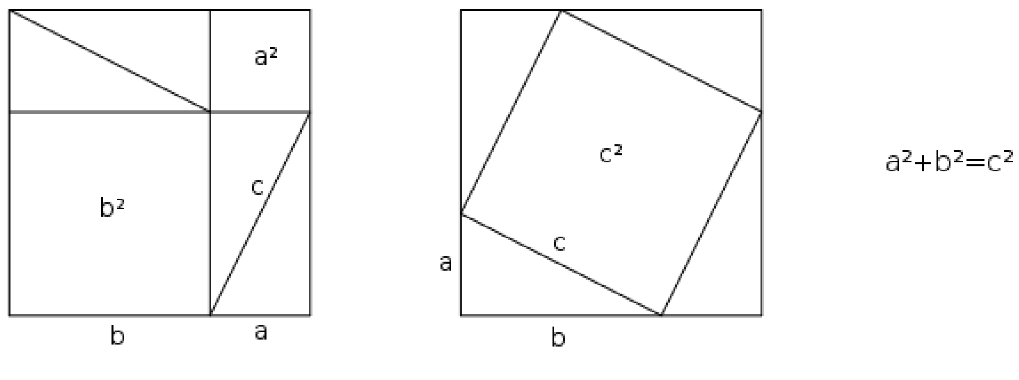


Figure 17

La deuxième des réformes qui nous intéresse, celle de 1970, la réforme des mathématiques modernes, se voulut bien plus audacieuse. Elle se basa tout d'abord sur les travaux de Hilbert qui ont consisté à construire les mathématiques sur des axiomes et les règles formelles du raisonnement pour ne plus faire appel à l'intuition. Tout doit être justifié. Il a entre autre essayé de compléter les axiomes de la géométrie euclidienne, dont un correspond à la proposition 4 des Éléments, établie par la méthode de superposition.[26] Les programmes s'inspirèrent également du texte programmatique « L'architecture des mathématiques » de Bourbaki : il soutient que « la construction des mathématiques n'est autre que la mise en place des grandes structures, les structures mères (structures d'ordre, algébriques, topologiques) et l'activité du mathématicien consiste à étudier les interactions entre les diverses structures. »[27] Cette réforme voulut privilégier les relations entre les objets aux objets eux-mêmes. Le succès des méthodes formalistes dans le développement des mathématiques montrait qu'il y avait là bien plus qu'une méthode et que les mathématiques avaient enfin accédé à leur essence[28]. Mais il s'est avéré que ces méthodes, en ce qui concerne l'enseignement, bloquaient dans certains domaines, et représentaient un travail gigantesque si l'on reprenait tout ce qui a été fait jusqu'à présent. Dans l'enseignement, la théorie des groupes étant par exemple mise dans le programme du collège, cela demandait un recyclage complet des professeurs. De plus, la géométrie élémentaire, qui restait le domaine le plus concret des mathématiques, disparut derrière sa représentation structurale.[29] Cette réforme fut également considérée comme un échec et disparut derrière les réformes suivantes.

2) Égalité d'angles

Avant d'aborder les cas d'égalité des triangles, nous allons premièrement nous pencher sur les différentes manières qu'ont Euclide et Ménélaüs de définir un angle et comment ils effectuent le report d'un angle.

Commençons par Euclide. Nous rappelons que dans la géométrie d'Euclide « les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles. »[30] (N. C. 7). Et selon la définition 8 de son premier livre :

« Un angle plan est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite. »[31]

Nous ne sommes pas très loin de la manière qu'a eue Rouché de définir le report d'un angle au XIXème siècle :

« On dit que deux angles sont égaux lorsqu'on peut les porter l'un sur l'autre, de manière qu'ils coïncident. Ainsi, lorsqu'on aura placé le côté A'B' sur AB, de façon que le sommet A' soit en A et que le côté A'C' tombe comme AC au-dessus de AB, il faudra, pour que les angles A et A' soient égaux, que le côté A'C' s'applique sur AC. »[32]

26 *Les éléments, op. cit.,* p. 191
27 Bourbaki 1948
28 L'enseignement des mathématiques en France (1970-1990), Rudolf Bkouche
29 La place de la géométrie dans l'enseignement des mathématiques en France : de la réforme de 1902 à la réforme des mathématiques modernes.
30 *Les éléments, op. cit.,* p. 179
31 *Les éléments, op. cit.,* p. 159
32 *Traité de géométrie,* Eugène Rouché , Charles de Comberousse, imprimrie Gauthier Villard, 1883

Pour nous convaincre de la similarité de ce raisonnement avec celui d'Euclide, nous reportons le lecteur à la démonstration de la proposition 4 des *Éléments* citée dans la partie 6) Cas d'égalité des triangles chez Euclide. Rappelons à présent la manière qu'a eu Ménélaüs de définir les angles sur la sphère :

Ménélaüs : Définition 1 :

« Les angles que j'appelle angles égaux contenus par des arcs de grands cercles sont ceux pour lesquels les arcs d'inclinaison de leurs demi-cercles respectifs sont égaux, c'est-à-dire l'arc du cercle qui passe par les pôles des deux cercles et contenu par les deux demi-cercles.»[33]

Comme pour les angles orientés où l'on associe l'angle à la longueur de l'arc du cercle trigonométrique parcourue, l'angle contenu par deux arcs est associé à la longueur de l'arc du grand cercle contenant les pôles et délimité par les cercles portant nos arcs comme on peut le constater sur la figure ci-dessous. L'angle ainsi défini est un angle géométrique.

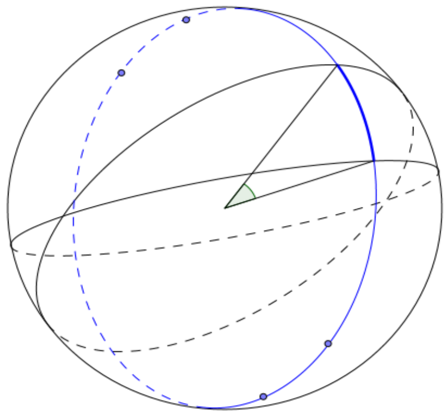


Figure 18

Regardons comment Ménélaüs effectue un report d'angle dans son livre :

Théorème 1

« Nous voulons expliquer comment sur un arc de grand cercle donné et en un point donné sur celui-ci nous construisons un angle, à partir d'un arc de grand cercle donné et d'un point donné, égal à un angle donné contenu par deux grands cercles.

Soit donc l'arc de grand cercle donné l'arc AB, le point donné le point B et l'angle donné contenu par deux grands cercles l'angle GDE. Nous voulons construire au point B de l'arc AB un angle égal à l'angle GDE. »[34]

33 *Die Sphärik, op. cit.,* p. 118-119

34 *Die Sphärik, op. cit.,* p. 1120

Démonstration :

« Posons donc le point D comme pôle et décrivons avec un intervalle quelconque l'arc GE; posons le point B comme pôle et avec le même intervalle décrivons l'arc AZ et retranchons de cet arc un arc égal à GE, à savoir AZ et menons un arc de grand cercle qui passe par les deux points B et Z, à savoir BZ. »

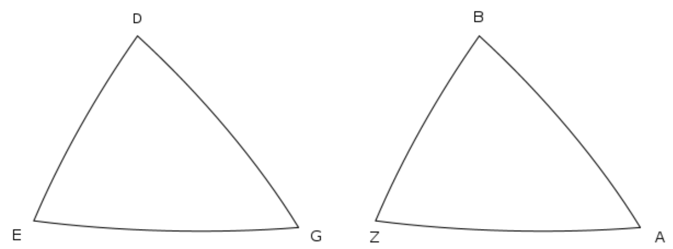


Figure 19

Il pose une sorte de compas au pôle D avec un écartement quelconque, mesure l'arc G et le reporte en posant ce compas au pôle B et en partant de l'arc BA.

« *Comme l'arc GE est égal à l'arc AZ, que les deux angles qui leur sont opposés aux angles au centre correspondants sont égaux entre eux et ils sont identifiés à la « la pente » des demi-cercles donnés, l'angle ABZ est égal à l'angle GDE. »*

Dans la traduction de KRAUSE on retrouve également en commentaire une variante de Nasīr ad-Dīn at-Tūsī :

« Comme les deux arcs GD et DE sont des arcs de grands cercles qui passent par le pôle du cercle GE, l'intersection de ceux-ci avec le cercle GE sont deux diamètres du cercle GE. Ils se coupent ainsi au centre du cercle, et l'intersection des deux cercles GD et DE, c'est-à-dire le diamètre de la sphère passant par le point D, est une perpendiculaire au plan du cercle GE abaissée sur son centre. Donc les intersections avec le cercle GE sont deux perpendiculaires sur celle-ci issues d'un de leurs points dans les deux plans. Elles comprennent un angle qui est opposé à l'arc GE. De même dans le triangle ABZ. Comme les deux arcs AZ et GE sont égaux et qu'ils sont tous les deux parties de cercles égaux, les deux angles, mentionnés au centre des deux cercles dits AZ et GE sont égaux. »

On se rapporte aux angles aux centre des cercles AZ et GE pour comparer les angles ABZ et GDE ou les arcs AZ et GE. Commençons par supposer que l'intervalle soit choisi de sorte que DG et BA soient des quadrants. Alors pour l'angle ABZ, prenons B comme pôle et soit P le plan équateur correspondant. On peut déjà identifier l'angle au centre, qui se situe dans le plan équateur, à l'angle entre les arcs AB et BZ et également à l'angle entre les plans contenant ces deux arcs. D'où, si l'on considère un autre plan P' parallèle à P et compris entre P et B, alors l'angle au centre sur le plan P' est égal à l'angle au centre sur P.

Revenons à la démonstration de Ménélaüs. Deux cas sont distingués par la suite : si les arcs AB, BZ, DG et DE sont des quadrants ou pas.

Premier cas :

« Si les deux cercles AZ et GE sont des grands cercles, alors ils sont égaux et parties des deux cercles qui passent par les pôles des cercles AB, BZ, GD et DE, et les deux angles que contiennent ses diamètres d'extrémités les points A, Z, G et E sont également égaux entre eux et ils sont mesurés par les deux angles B et D. »

Les arcs AB, BZ, DG et DE sont des quadrants. Ici, comme le dit la définition de deux angles égaux, l'arc du cercle passant par les pôles des deux arcs compris entre nos deux cercles supports nous donne « l'écart » entre ces cercles, soit l'angle cherché.

Deuxième cas :

« Et si les deux arcs AZ et GE ne sont pas des parties de grands cercles, alors ils sont parallèles aux deux grands cercles décrits autour des deux pôles B et D. Par conséquent, leurs diamètres d'extrémités A, Z et G, E, sont parallèles aux diamètres des deux grands cercles menés de l'extrémité des quadrants issus des points B et D sur les cercles AB, BZ et GD, DE qui est le point de passage des deux cercles qui passent par les pôles des cercles AB, BZ, GD, DE. Et parce que ces diamètres sont parallèles entre eux, les angles qu'ils contiennent sont égaux entre eux, c'est-à-dire dans chaque cas deux angles au centre de deux cercles parallèles entre eux contenus par des diamètres qui sont parallèles aux diamètres des grands cercles donnés.
Par conséquent, l'angle au centre opposé à AZ est égal à l'angle au centre opposé à GE. Donc les quatre angles sont égaux. Ces diamètres sont parallèles entre eux, parce que chacun des deux cercles AB, BZ et des deux cercles GD, DE coupe deux cercles parallèles en deux de leurs diamètres. »

Cette fois-ci on considère le cas où les arcs AB, BZ, DE, DG ne sont pas des quadrants. Le cercle AZ est parallèle au cercle C de pôle B. Soit A' et Z' les intersections des cercles AB et BZ avec C. D'après la variante de Nasīr ad-Dīn at-Tūsī :, l'angle au centre d'extrémités A et Z sur le cercle AZ, l'angle au centre d'extrémités A' et Z' et l'angle d'arcs ABZ sont tous trois égaux.

3) Figure triangulaire ou trilatère ?

Figures trilatères ou figures triangulaires ? Le terme trilatère n'est utilisé qu'à partir d'Euclide. L'angle et le côté sont deux éléments des figures qui sont intimement liés. Et il s'avère que, dans la géométrie euclidienne, la terminologie trilatère et la terminologie triangulaire coïncident.

Une figure contenant trois angles est formée de trois sommets. En effet, puisque si deux angles ont le même point A comme origine, il partira alors trois ou quatre lignes de ce point suivant si nos angles en ont une en commun, et devront former le troisième angle ; or d'après la définition 8 un angle est formé de deux lignes.

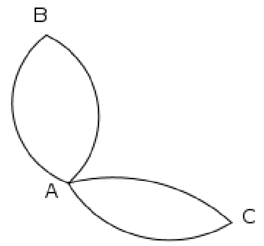


Figure 20

Un triangle a donc trois sommets d'où chacun partent deux lignes ; nous avons deux à six lignes sur notre figure. Or si nous n'avons que deux lignes, nous n'aurons que quatre extrémités au plus, ce qui est nettement inférieur aux six nécessaires pour les trois angles aux trois points distincts, et d'après la notion commune 9, il n'existe seulement qu'une droite passant par chaque couple de sommets, il n'y a par conséquent qu'au plus trois lignes. Une figure triangulaire est trilatère.

Montrons la réciproque. Soit une figure trilatère. Si deux des lignes sont parallèles, pour que l'on obtienne bien une figure, il faudrait que la troisième ligne soit la limite de la figure trilatère des deux côtés de nos deux premières droites comme sur la figure ci-dessous. Deux des lignes se couperaient deux fois renfermant ainsi une aire ce qui est contraire à la notion commune 9. Les trois lignes sont donc deux à deux sécantes et une fois, formant exactement trois angles.

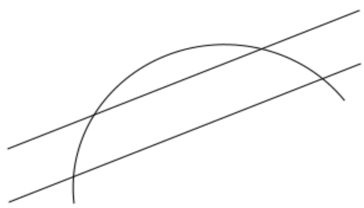


Figure 21

Nous venons de montrer que les figures triangulaires sont exactement les figures trilatères. La question est pourquoi Euclide tenait absolument à utiliser le terme trilatère. Nous allons voir que cela est en rapport direct avec les cas d'égalités des triangles.

4) Qu'entend-on par « mêmes » triangles ?

Dans n'importe quelle structure sur des éléments, par exemple sur des points, des droites, des segments et des cercles, il est important de pouvoir dire si deux choses sont égales ou pas. - nous spécifierons par la suite ce que signifie exactement égales – En particulier pour Euclide et Ménélaüs, la géométrie était selon eux la science des corps solides, un objet ne peut pas au cours du temps, après un mouvement, être déformé : une fois déplacé, il reste égal à son antécédent. Pour eux le mouvement est représenté par les "isométries", à un détail près, ils ne considèrent que l'état initial et l'état final. Ils supposent ainsi une séparation claire entre « ce qui est et ce qui devient ».[35] Pourquoi s'intéresser aux triangles ? Un point est égal à n'importe quel autre point. Si notre espace admet une métrique, deux segments sont identiques s'ils ont tout simplement la même longueur. Et la figure d'aire non-nulle la plus simple est le triangle. C'est une des raisons pour lesquelles les triangles tiennent une si grande place en géométrie. Et en ayant un regard plus actuel, l'égalité de points ne fait appel qu'aux translations, l'égalité de segments aux translations et aux rotations, alors que l'égalité de triangle fait appel aux translations, aux rotations et aux réflexions qui sont générateurs de l'ensemble des isométries du plan, c'est-à-dire les transformations.

Rappelons, brièvement, les énoncés des différents cas d'égalité des triangles :

« 1) Soient deux triangles ABC et A'B'C' tels que les angles BAC et B'A'C' soient égaux et les côtés AB et AC soient respectivement égaux aux côtés A'B' et A'C', alors les triangles ABC et A'B'C' sont égaux.

2) Soient deux triangles ABC et A'B'C' tels que les côtés BC et B'C' soient égaux et les angles ABC et ACB soient respectivement égaux aux angles A'B'C' et A'C'B', alors les triangles ABC et A'B'C' sont égaux.

3) Soient deux triangles ABC et A'B'C' tels que les côtés AB, BC, CA soient respectivement égaux aux côtés A'B', B'C', C'A', alors les triangles ABC et A'B'C' sont égaux. »[36]

Pour le cas d'égalité des triangles, on regarde si les triangles sont égaux, mais il existe une multitude d'autres termes permettant de dire si deux triangles sont les « mêmes » ou « plus ou moins les mêmes ». On dit que deux triangles sont :

- Ressemblants s'ils ont mêmes allures
- Superposables s'ils sont confondus lorsque mis l'un sur l'autre (c'est-à-dire :Mêmes formes et mêmes dimensions.)
- Équivalents s'ils ont les mêmes propriétés (rien ne permet de distinguer l'un de l'autre)
- Symétriques s'ils sont superposables, pas nécessairement par glissement
- Égaux ou Isométriques : s'ils sont Équivalents en géométrie plane (Superposables par glissement)
- Différents lorsqu'ils sont non égaux.
- Identiques lorsqu'on parle du même objet (Il est "égal" à lui-même)
- Distincts s'ils sont séparés et indépendants (Ils peuvent être égaux ou non)

35 Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles, Bkouche Rudolf , 2000 Bulletin de l'APMEP. Num. 430. p. 613-629

36 Quelques remarque,s op. cit.

Intuitivement, à l'aide de ce que l'on vient de dire, on remarque qu'en géométrie euclidienne, deux triangles sont égaux si 3 de leurs éléments sont égaux dont au moins un côté sous certaines conditions. Et si 3 angles sont égaux nous n'avons pas forcément deux triangles égaux : ils sont semblables. Nous allons voir comment Euclide traite ces différents cas, et ce qu'il en est sur la sphère de Ménélaüs.

Maintenant essayons de répondre à la question dans la géométrie des Éléments. Qu'est ce que deux triangles égaux pour Euclide ? La notion commune 7 nous dit que *«Les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles. »*[37] Intuitivement, nous pouvons voir l'ajustement comme du papier calque. On copie, à l'aide de notre papier calque, le premier triangle et pour le reporter et voir si il coïncide avec un autre, il faut prendre un point et une direction de référence. La mise en place rigoureuse de ce que l'on vient de considérer se fait petit à petit jusqu'à la proposition 4, nous verrons donc cela en temps voulu. Plus haut, nous avons remarqué, qu'Euclide utilise le terme de trilatère à la place de celui de triangulaire dans la définition 19, et ceci, pour la simple et bonne raison, que si l'on arrive à juxtaposer les trois côtés d'un triangle sur ceux d'un autre, on aura juxtaposer le premier triangle sur le second, ils alors seront égaux.

La géométrie de Ménélaüs, prenant comme acquis Les *Éléments*, adopte la même définition d'égalité des triangles. Deux triangles sphériques sont égaux si les arcs de grands cercles qui les composent sont égaux deux à deux.

37 *Les éléments*, Volume I, Livres I-IV, traduction et interprétations par Bernard Vitrac des commentaire de Proclus , PUF, 1990, p. 179

5) Aire des triangles sphériques

Avant de rentrer dans le vif du sujet, et pour nous familiariser un peu avec les triangles de la sphère, nous allons considérer un théorème simple mais d'une très grande profondeur.

Plaçons-nous dans un espace affine euclidien de dimension 3 et considérons-y une sphère que l'on appellera S de rayon r.

<u>Formule de Girard :</u> *« Soit T un triangle de S d'angles α, β et γ. Alors :*

Aire(T) = $r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ »[38]

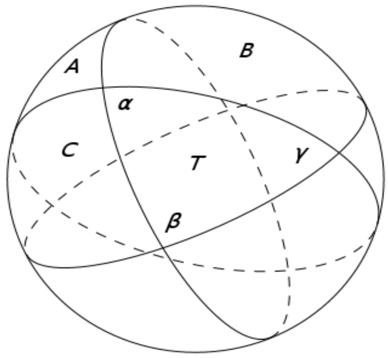


Figure 22

Démonstration :

Soit D la demi-sphère délimitée par le côté du triangle T opposé à l'angle α, et A, B et C les trois autres triangles délimités par les côtés de T et appartenant à D.
On remarque que tout d'abord, comme le montre le dessin ci-dessus :
Aire (D) = Aire (T) + Aire (A) + Aire (B) + Aire (C)
L'aire de la demi-sphère D vaut $2\pi r^2$ et l'aire, par exemple, du fuseau renfermé par l'angle β vaut $2\beta r^2$.
Il s'ensuit donc que $2\pi r^2$ = Aire (T) + ($2\alpha r^2$ - Aire (T)) + ($2\beta r^2$ - Aire (T)) + ($2\gamma r^2$ - Aire (T))
D'où Aire(T) = $r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$.

□

Nous avons vu plus haut que dans la géométrie euclidienne le fait que la somme des angles d'un triangle soit égale à π est une conséquence du postulat des parallèles qui ne vaut pas dans la sphère de Ménélaüs. Grâce à la formule de Girard, nous retrouvons entre autre ce résultat, avec la précision supplémentaire que la différence entre la somme des angles et π correspond miraculeusement et exactement à l'aire du triangle (en prenant une sphère de rayon 1). Et de plus nous remarquons que plus l'aire d'un triangle sur notre sphère est petite plus la somme des angles se rapproche de π, et plus nous nous rapprochons de la géométrie euclidienne.

Nous constatons également par la même occasion que sur la sphère de Ménélaüs, la notion de triangle semblable n'existe pas. Si deux triangles ont les mêmes angles, il ont donc la même aire, leurs côtés sont donc égaux deux à deux, et seront donc égaux.

38 D'après *Géométrie* de Michel Audin

6) Cas d'égalité des triangles chez Euclide

Dans les *Éléments* d'Euclide, les trois cas d'égalité des triangles correspondent respectivement aux propositions 4, 26 et 8. Comme nous l'avons dit plus haut, ces cas d'égalité des triangles permettent de traduire en quelque sorte le problème du mouvement. Arriver à dire que deux figures rectilignes, qui sont au passage toujours décomposables en triangles, sont égales revient à déplacer la première en la positionnant sur la deuxième.

a) Premier cas d'égalité : 2 côtés et l'angle qu'ils comprennent

Le premier cas d'égalité des triangles est étudié dans la proposition 4, qui est en quelque sorte la clef de voûte des Éléments.

Proposition 4 des éléments d'Euclide

« Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui-ci contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent. »[39]

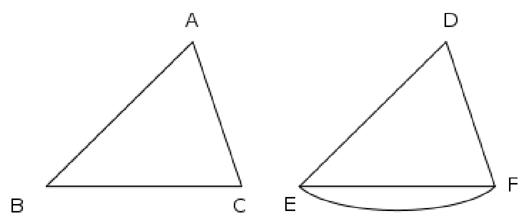


Figure 23

Démonstration :

« Soient deux triangles ABC, DEF ayant les deux côtés AB, AC égaux aux deux côtés DE, DF, chacun à chacun, d'une part AB à DE, d'autre part AC à DF, ainsi que l'angle sous BAC égal à l'angle sous EDF.

Je dis que la base BC aussi est égale à la base EF, et le triangle ABC sera égal au triangle DEF, et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent, d'une part celui sous ABC à celui sous DEF, d'autre part celui sous ACB à celui sous DFE.

En effet, le triangle ABC étant appliqué sur le triangle DEF, d'une part le point A étant posé sur le point D, d'autre part la droite AB sur DE, le point B aussi s'ajustera sur le point E parce que AB est égal à DE. Alors, AB étant ajustée sur DE, la droite AC aussi s'ajustera sur DF parce que l'angle sous BAC est égal à celui sous EDF. De sorte que le point C aussi s'ajustera sur le point F parce que, de plus, AC est égale à DF. Mais B a aussi été ajusté sur E. De sorte que la base BC s'ajustera sur la base EF {. En effet, si, d'une part B s'ajustant sur E, d'autre part C sur F, la base BC ne s'ajustait pas sur EF, deux droites contiendraient une aire, ce qui est impossible (N.C. 9)[40]*. Donc la base BC s'ajustera sur EF} et lui sera égale (N. C. 7)*[41]*. De sorte que tout le triangle ABC s'ajustera aussi sur tout le triangle DEF et lui sera égal (N. C. 7), et les angles restants s'ajusteront*

39 *Les éléments, op. cit.*, p. 200
40 Deux droites ne contiennent pas d'aire
41 Les choses qui s'ajustent les unes les autres sont égales entre elles.

sur les angles restants et leur seront égaux (N. C. 7), d'une part celui sous ABC à celui sous DEF, d'autre part celui sous ACB à celui sous DFE.

Donc si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent. Ce qu'il fallait démontrer. »

Essayons dans un premier temps de comprendre plus amplement ce qu'est l'ajustement. Procédons pour cela pas à pas :

L'élément le plus simple est le point, un point est ajustable sur un autre point puisque rien ne s'y oppose. Leurs parties coïncident puisqu'ils n'en possèdent aucune d'après la définition 1.

Ensuite comment juxtaposer une droite limitée sur une autre ? Deux droites sont juxtaposables si et seulement si elles ont même longueur.

Soient maintenant les droites limitées AB, AC, DE, DF telles que AB soit égale à DE, AC à DF et l'angle BAC à l'angle EDF comme sur la figure ci-dessous. Pour que AB s'ajuste sur DE, de la même manière que précédemment, il faut que leurs longueurs soient égales. Nous allons regarder comment par suite AC peut s'ajuster sur DF. La relation qui lie AB et AC est l'inclinaison qu'elles ont, c'est-à-dire l'angle. Si l'on suppose que les angles BAC et EDF sont égaux, alors la juxtaposition de AC retranchera DF, et si de plus on suppose que AD et DF sont égales, alors C tombera sur F. On remarque aisément qu'il faut qu'il y ait ces trois égalités pour qu'il y ait ajustement des figures, ce qui revient à la réciproque de la proposition 4.

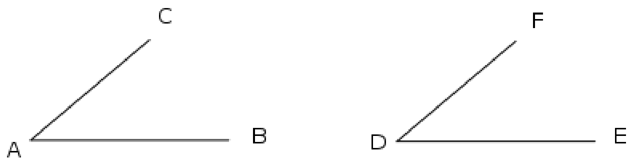


Figure 24

Enfin pour dire que deux triangles sont ajustables, que la base s'ajuste avec la base, et que à l'aide de ce même ajustement, c'est-à-dire à l'aide du même papier calque, les autres droites limitées qui les composent s'ajustent chacune à chacune.

Le deuxième point à éclairer est l'ajustement de BC sur EF. Vitrac rajoute entre accolades la démonstration de celui-ci. Les points B et C s'ajustent sur les points E et F, mais il n'est pas évident que la droite BC s'ajuste sur EF. La géométrie qui est construite par Euclide n'utilise pas de règle, mais des définitions des notions communes et des demandes. Il faut donc évoquer la notion commune 9 pour dire que EF et l'ajustement de BC ne peuvent contenir d'aire et sont donc égaux.

Ensuite, il peut paraître troublant que l'auteur, une fois qu'il a ajusté BC sur EF, dise seulement que les angles restants sont égaux. En regardant d'un peu plus près, l'ajustement de BC et BA sur EF et ED chacun à chacun montre bien que les angles CBA et FED sont égaux, et de la même manière BCA et EFD sont égaux.

Vitrac fait remarquer que ni Euclide, ni Proclus ne s'intéressent au cas où les angles égaux ne se trouvent pas contenus par les côtés égaux. Pour se rendre compte de l'importance de la position de cet angle, il suffit de considérer le contre-exemple suivant : Soient ABC et DEF deux triangles tels que AB et AC soient respectivement égaux à DE et DF. La figure ci-dessous, montre que deux cas de figure se présentent alors, dont un seulement correspond à l'égalité des triangles ABC et DEF. If faut donc que les angles égaux soient contenus par les côtés égaux.

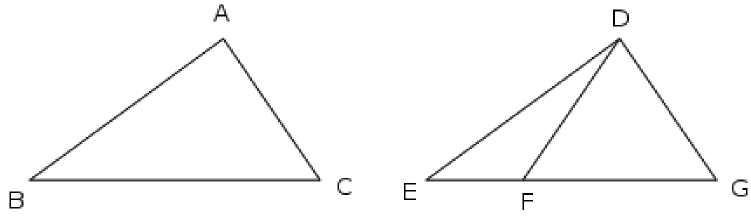


Figure 25

b) Troisième cas d'égalité : 3 côtés égaux

Le troisième cas d'égalité des triangles est traité dans la proposition 8 qui est un corollaire de la proposition 7 :

« Sur la même ligne droite, ne seront pas construites, égales chacune à chacune aux deux mêmes droites, deux autres droites, en un point quelconque, différent mais du même côté, et ayant les mêmes limites que les premières. »[42]

Ce qui veut dire en d'autres termes que si sur un segment AB sont construits les segments AC, AD, BC, BD tous du même côté de AB de telle sorte que AC et BC soient égaux à AD et BD chacun à chacun, alors C = D. Cette proposition se montre à l'aide du fait que les triangles isocèles ont leurs angles à la base égaux entre eux (Prop. 5).

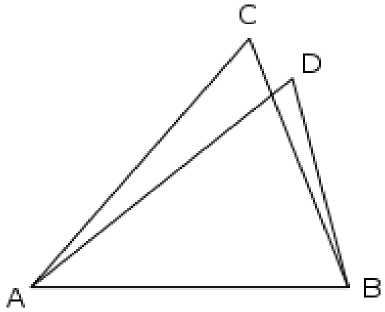


Figure 26

42 *Les éléments, op. cit.,* p. 212

Et la proposition 8 n'est autre qu'une application de la proposition 7 à l'ajustement de deux triangles :

Proposition 8 Euclide

« Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, s'ils ont, de plus, la base égale à la base, ils auront aussi un angle égal, à savoir celui qui est contenu par les droites égales. »

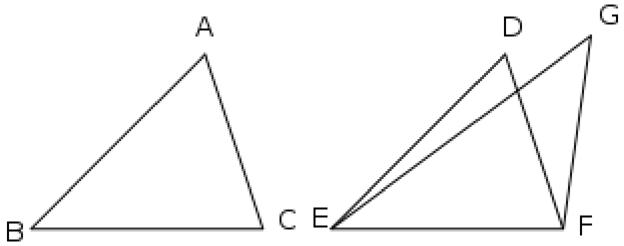


Figure 27

Démonstration :

« Soient deux triangles ABC, DEF ayant les deux côtés AB, AC égaux aux deux côtés DE, DF, chacun à chacun, d'une part AB à DE, d'autre part AC à DF. Qu'ils aient aussi la base BC égales à la base EF.

Je dis que l'angle sous BAC est aussi égal à celui sous EDF.

En effet le triangle ABC étant appliqué sur le triangle DEF, le point B étant posé sur le point E, et la droite BC sur la droite EF, le point C s'ajustera aussi sur F parce que BC est égale à EF.

Alors BC s'étant ajustée sur EF, BA, CA s'ajusteront sur ED, DF. En effet, si, d'une part, la base BC s'ajuste sur la base EF, et que les côtés BA, AC ne s'ajustent pas sur ED, DF mais s'en écartent comme EG, GF, alors sur la même droite auront été construites, égales chacune à chacune aux deux mêmes droites, deux autres droites, en un point quelconque, différent mais du même côté, et ayant les mêmes limites. Mais elles ne sont pas construites ainsi (Prop. 7). On n'a donc pas la base BC ajustée sur la base EF et les côtés BA, AC ne s'ajustent pas sur ED, DF. Donc ils s'ajustent. De sorte que l'angle sous BAC s'ajustera aussi sur l'angle sous EDF et lui sera égal (N.C. 7)[43].

Donc si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, s'ils ont, de plus, la base égale à la base, ils auront aussi un angle égal, à savoir celui qui est contenu par les droites égales. Ce qu'il fallait démontrer. »

Que deux droites limitées soient égales est équivalent au fait qu'elles soient ajustables. Mais il faut bien avoir à l'esprit que dire que les côtés de deux triangles sont deux à deux égaux, c'est-à-dire ajustables, ne veut pas dire que le premier triangle est ajustable sur le second, il faut donc le montrer.

43 N. C. 7 : Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.

c) Deuxième cas d'égalité : deux angles et un côté

Le cas d'égalité des triangles restants apparaît plus tardivement dans les *Éléments* puisqu'il nécessite un lemme important, la proposition 16 :

« Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés. »[44]

Comme nous l'avons vu plus haut, lors de l'analyse des 9 notions communes des *Éléments*, cette proposition est fausse dans la géométrie de Ménélaüs, le sens de l'inégalité changera suivant que deux des côtés font un demi-cercle ou non. Ce cas d'égalité des triangles sera donc bien plus délicat en géométrie sphérique. Considérons comment Euclide traite le second cas d'égalité des triangles :

Proposition 26

« Si deux triangles ont deux angles égaux à deux angles, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, soit celui des angles égaux, soit celui sous-tendant l'un des angles égaux, ils auront aussi les côtés restants égaux aux côtés restants, {chacun à chacun}, et l'angle restant égal à l'angle restant. »[45]

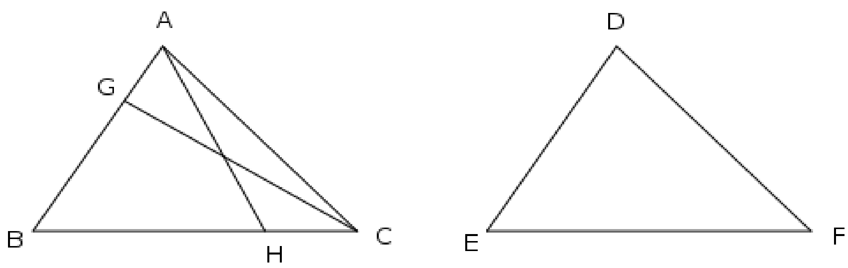


Figure 28

Démonstration :

« Soient deux triangles ABC, DEF ayant les deux angles sous ABC, BCA, égaux aux deux angles sous DEF, EFD, chacun à chacun, d'une part celui sous ABC à celui sous DEF, d'autre part celui sous BCA à celui sous EFD. Et qu'ils aient aussi un côté égal à un côté, d'abord celui des angles égaux, BC à EF. Je dis qu'ils auront aussi les côtés restants égaux aux côtés restants, chacun à chacun, d'une part AB à DE, d'autre part AC à DF, et l'angle restant égal à l'angle restant, celui sous BAC à celui sous EDF.

Car si AB n'est pas égal à DE, l'un d'eux est plus grand : que AB soit plus grand et que soit placée la droite BG égale à DE, et que GC soit jointe (Prop. 3)[46]*.*

Or, puisque d'une part BG est égal à DE, d'autre part BC à EF, les deux BG, BC sont égaux aux deux DE, EF, chacun à chacun. Et l'angle sous GBC est égal à l'angle sous DEF. Donc la base GC est égale à la base DF, et le triangle GBC est égal au triangle DEF, et les angles restants seront égaux aux angles restants, c'est-à-dire ceux que sous-tendent les côtés égaux (Prop. 4) ; donc l'angle sous GCB à celui sous DFE. Mais celui sous DFE est supposé égal à celui sous BCA. Et

44 *Les éléments, op. cit.,* p. 226
45 *Les éléments, op. cit.,* p. 243
46 Prop. 3 : De deux droites inégales données, retrancher de la plus grande, une droite égale à la plus petite.

donc celui sous BCG est égal à celui sous BCA (N.C. 1)[47]*, le plus petit au plus grand. Ce qui est impossible. Donc AB n'est pas inégal à DE. Donc il est égal.*

Or BC est aussi égal à EF. Alors les deux AB, BC sont égaux aux deux DE, EF, chacun à chacun ; et l'angle sous ABC est égal à celui sous DEF. Donc la base AC est égale à la base DF, et l'angle restant, celui sous BAC, est égal à l'angle restant, celui sous EDF (Prop. 4).

Mais alors, ensuite, que des côtés qui sous-tendent des angles égaux soient égaux, par exemple AB à DE. Je dis encore que les côtés restants seront égaux aux côtés restants, d'une part AC à DF, d'autre part BC à EF, et que de plus, l'angle restant, celui sous BAC, sera égal à l'angle restant, celui sous EDF.

Car si BC n'est pas égal à EF, l'un d'eux est plus grand ; que BC soit plus grand, si cela est possible, et que soit placée la droite BH, égale à EF (Prop. 3). Et que AH soit jointe (Dem. 1)[48]*. Et puisque, d'une part BH est égal à EF, d'autre part AB est égal à DE, les deux AB, BH sont alors égaux aux deux DE, EF, chacun à chacun. Et ils contiennent des angles égaux. Donc la base AH est égale à la base DF et le triangle ABH est égal au triangle DEF, et les angles restants seront égaux aux angles restants, c'est-à-dire ceux que sous-tendent les côtés égaux (Prop. 4) : donc l'angle sous BHA est égal à celui sous EFD ; mais celui sous EFD est égal à celui sous BCA. Alors dans le triangle AHC, l'angle extérieur, celui sous BHA, est égal à celui sous BCA (N.C.1), intérieur et opposé ; ce qui est impossible (Prop.16)*[49]*. Donc BC n'est pas inégal à EF. Donc il est égal. Or AB est aussi égal à DE. Les deux AB, BC sont alors égaux aux deux DE, DF, chacun à chacun ; et ils contiennent des angles égaux. Donc la base AC est égale à la base DF, et le triangle ABC est égal au triangle DEF, et l'angle restant, celui sous BAC, est égal à l'angle restant, celui sous EDF (Prop.4).*

Donc, si deux triangles ont deux angles égaux à deux angles, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, soit celui des angles égaux, soit celui sous-tendant l'un des angles égaux, ils auront aussi les côtés restants égaux aux côtés restants, et l'angle restant égal à l'angle restant. Ce qu'il fallait démontrer. »

Historiquement parlant, ce théorème est, selon Procus, attribué par Eudème à Thalès. Il serait intéressant de savoir dans quelle mesure.

Nous mentionnerons seulement le fait que l'ordre dans lequel les « éléments » sont égaux est important à l'aide du contre-exemple suivant énoncé par Proclus. Soit un triangle ABC rectangle en B et D le pied de la hauteur issue de B. Les triangles ABD et BCD ont bien deux angles égaux et un côté égal. Il faut donc que l'emplacement des deux côtés égaux soit le même sur les deux triangles, c'est-à-dire par rapport aux angles qui sont égaux.

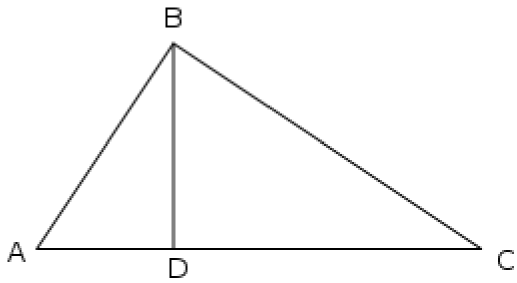


Figure 29

47 N.C. 1 : Les choses égales à une même chose sont égales entre elles.
48 Dem. 1 : Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.
49 Prop. 16 : Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés.

d) Conclusion

Après analyse, dans les *Éléments,* des différents cas qui peuvent se présenter quant à l'égalité des triangles dans le plan, nous pouvons faire la conclusion suivante :

Si trois des « éléments » des deux triangles sont égaux dont au moins un côté alors les triangles sont égaux, sauf dans deux cas « ambigus » : si les éléments sont deux côtés et un angle, il faut que l'angle soit contenu par les côtés égaux. Et si les éléments sont un côté et deux angles, il faut que la position relative des éléments soit la même.

7) Cas d'égalité des triangles chez Ménélaüs

a) Premier et troisième cas d'égalité des triangles

L'étude des cas d'égalité des triangles est bien plus délicate dans la géométrie sphérique : c'est pourquoi Ménélaüs les sépare en 8 différents théorèmes. Comme nous l'avons remarqué plus haut, le cas le plus litigieux ici est le deuxième cas. Ménélaüs commence donc par s'acquitter des deux autres en un seul et même théorème :

Théorème 4 des Sphériques de Ménélaüs :

« Si deux côtés d'une figure trilatère sont égaux à deux côtés d'une autre figure trilatère, chacun à chacun si la base est égale à la base, alors les deux angles des deux figures contenus par les grands côtés égaux sont égaux, et si l'angle est égal à l'angle, alors la base est égale à la base.

Soient deux figures trilatères ABG, DEZ, et soit le côté AB égal au côté DE, et le côté BG égal au côté EZ.

Je dis que si la base AG est égale à la base DZ, alors l'angle au point B est égal à l'angle au point E, et que si l'angle au point B est égal à l'angle au point E, alors la base AG est égale à la base DZ. »[50]

$$\begin{array}{l} AB=DE \\ BG=EZ \\ AG=DZ \end{array} \Rightarrow \hat{B}=\hat{E} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{l} AB=DE \\ BG=EZ \\ \hat{B}=\hat{E} \end{array} \Rightarrow AG=DZ$$

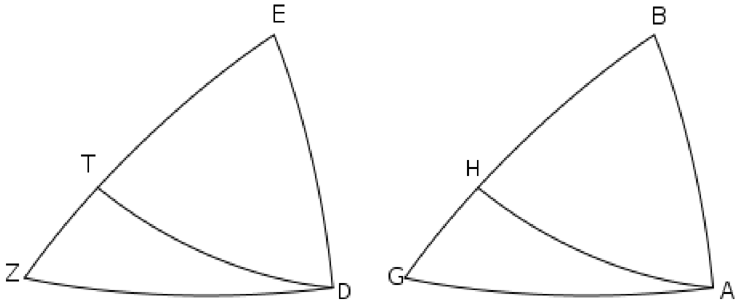


Figure 30

50 *Die Sphärik, op. cit.,* p. 123

Démonstration :

« Comme nous posons les deux points B, E comme pôles et décrivons avec l'intervalle des deux points A, D deux arcs de cercle AH, DT, alors ces deux cercles sont égaux entre eux. Comme l'arc BG est égal à l'arc EZ et l'arc BH à l'arc ET, l'arc GH doit être égal à l'arc ZT. Ainsi sur leurs deux diamètres issus des deux points H, T s'élèvent deux segments de cercle perpendiculaires égaux, à savoir les deux dont sont retranchés les deux arcs égaux GH, TZ qui sont plus petit que la moitié des deux segments, et les deux arcs GA, ZD, qui sont égaux, ont été menés. Par conséquent, l'arc AH est égal à l'arc DT (Théod. II 11 et Eucl. III 29[51]). Donc l'angle en B est égal à l'angle en E (Proposition I 1). Et nous montrons de même que si l'angle en B est égal à l'angle en E, alors la base AG est égale à la base DZ, parce que l'arc AH est égal à l'arc DT. Et c'est ce qu'il fallait démontrer ! »

Théorème XI des *Sphèrique* de Théodose de Tripolis :

« Si l'on élève des segments de cercle égaux et perpendiculaires sur les diamètres de cercles égaux ; si l'on retranche de ces segments, à partir de leurs extrémités, des arcs égaux plus petits que la moitié des arcs entiers, et si, des points ainsi déterminés, l'on mène des droites égales sur les circonférences des premiers cercles, ces droites découperont des arcs égaux sur ces premiers cercles à partir des extrémités de leurs diamètres.

Élevons, dans les cercles égaux ABG, DEZ, sur les diamètres AG, DZ, les segments de cercle égaux et perpendiculaires AHG, DKZ ; retranchons-en, à partir de leurs points extrêmes A, D, les arcs égaux, AH, DK plus petits que la moitié des arcs des segments entiers AHG, DKZ, et faisons arriver, des points H, K aux circonférences des premiers cercles ABG, DEZ, les droites égales HB, KE. Je dis que l'arc AB est égal à l'arc DE. »

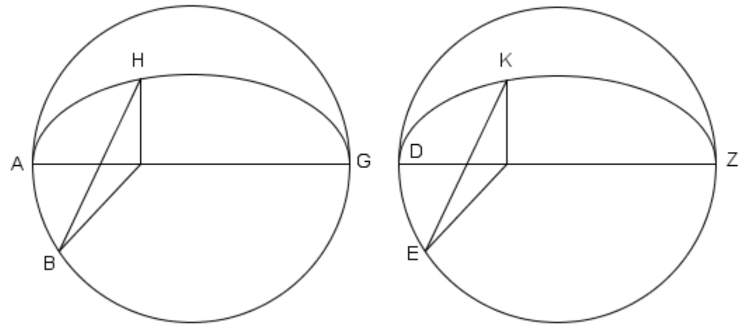


Figure 31

Les choses se passant de manière relativement similaire au plan, Ménélaüs utilise le fait qu'il est possible de retrancher du plus grand de deux arcs inégaux donnés un arc égal au plus petit, ce qui correspond à la proposition 3 des *Éléments*.

51 *Les Éléments*, op. cit. p. 445 : *« Dans les cercles égaux, les circonférences égales sont sous-tendues par des droites égales »*

Pour construire ces triangles sphériques, on commence par poser les points B et E comme pôles de notre sphère. On mène les arcs de méridien BG et EZ. A l'aide d'un compas on va chercher où se trouvent les points A et D en menant les parallèles AH et DT. Et à partir de là il suffira, d'aller chercher les points A et D à l'aide des écartements GA et ZD. C'est la manière d'obtenir ces points. Puisque l'on utilise toujours des arcs et des écartements égaux, les points A et H ont le même écartement que les points D et T. La proposition d'Euclide nous permet de dire que puisque les cordes AH et DT sont égales, alors les arcs cercles de centre B et E passant par ces points sont égaux. Et à l'aide de la proposition 1 il suffit que n'importe quels arcs de parallèles contenus par les arcs contenant les angles considérés, s'ils sont tracés avec le même intervalle, soient égaux pour que les angles soient égaux. Et par ce même procédé, on obtient l'autre cas d'égalité des triangles.

b) Complément du premier cas d'égalité des triangles

Nous savons, à l'aide de l'étude des *Éléments,* que dans la géométrie plane, lorsque sur deux figures triangulaires deux côtés et un angle de l'une sont égaux à deux autres côtés et un angle de l'autre, il suffit que les angles soient contenus par les côtés pour que les triangles soient égaux. Sur la sphère, comme nous venons de le voir dans la proposition précédente, ceci est encore vrai, mais nous pouvons aller encore plus loin à l'aide de la proposition 13 qui nous dit que dans le cas où l'angle n'est pas contenu par les côtés égaux, il suffit que la somme des angles contenus par les côtés ne soit pas égale à deux droits.

Théorème 13 des Sphériques de Ménélaüs :

« S'il y a deux figures trilatères telles qu'un angle de l'un soit égal à un angle de l'autre, que les deux côtés d'une des deux qui contiennent un des deux angles restants d'une des deux figures, sont égaux aux deux côtés qui contiennent l'angle correspondant de l'autre figure, chaque côté à chaque côté, et que les deux angles restants des deux figures ensemble ne sont pas égaux à deux droits, alors le côté restant est égal au côté restant et les angles restants sont égaux.

Soit deux figures trilatères, ABG, DEZ, l'angle en A soit égal à l'angle en D, le côté AG soit égal au côté DZ et le côté BG soit égal au côté EZ et les deux angles ABG, DEZ soient ensemble différents de deux angles droits.

Alors je dis que le côté AB est égal au côté DE. »[52]

$$\left.\begin{array}{c}\hat{A}=\hat{D}\\ AG=DZ\\ BG=EZ\\ \widehat{ABG}+\widehat{DEZ}\neq\pi\end{array}\right\}\Rightarrow AB=DE$$

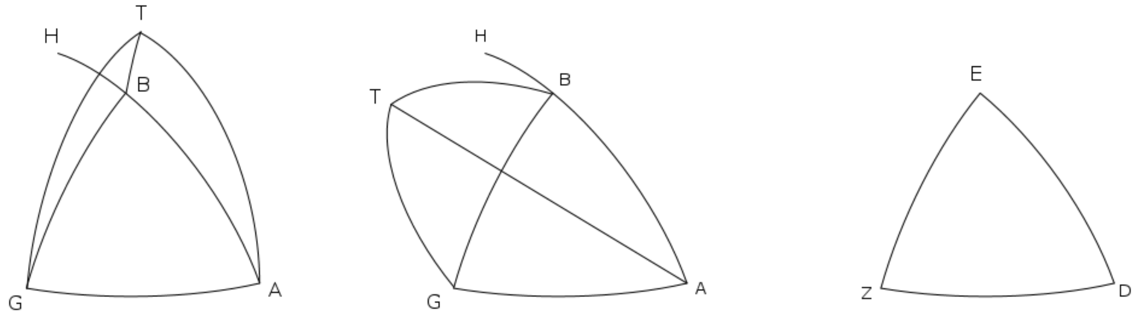


Figure 32

52 *Die Sphärik, op. cit.,* p. 132

Démonstration :

« En effet nous prolongeons l'arc AB jusqu'en H. Comme l'angle HBG n'est pas égal à l'angle DEZ, nous élevons au point B de l'arc AB un angle égal à l'angle DEZ, à savoir GBT (Proposition I 1). Nous posons BT égal à DE et menons les deux arcs TG, TA. Comme l'angle GBT est égal à l'angle DEZ et comme les deux côtés GB, BT sont égaux aux deux côtés ZE, ED,la base GT est égale à la base DZ, qui est elle-même égale à AG – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 4 – et l'angle BTG est égal à l'angle EDZ, lequel angle est égal à l'angle BAG. L'angle GTA est lui aussi égal à l'angle TAG. Par conséquent, l'angle BAT est égal à l'angle BTA. Ainsi – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 3 – le côté BA est égal au côté BT qui est égal au côté DE. Par conséquent, le côté BA est égal au côté DE. Et c'est ce qu'il fallait démontrer ! »

La démonstration est brève et n'utilise que le premier cas d'égalité des triangles, et la proposition 3 disant que « Si deux des angles d'une figure triangulaire sont égaux entre eux, alors les deux côtés qui leur sont opposés sont égaux. », ce qui reste vrai dans la géométrie d'Euclide. En utilisant le même raisonnement dans la géométrie plane on obtient donc le même résultat. Pour s'en persuader il suffit de considérer le cas dit « ambigu » qui posait souci (cf. figure ci-dessous). Et l'on se rend bien compte que la condition qui impose que les deux angles ABG, DEZ soient ensemble différents de deux angles droits écarte le problème.

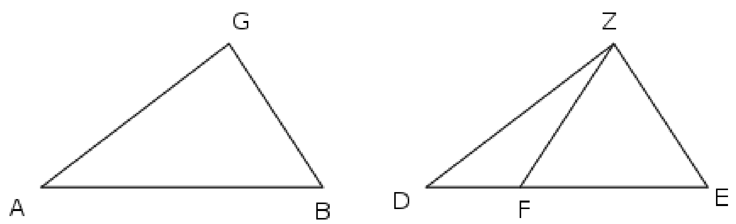


Figure 33

c) Deuxième cas d'égalité des triangles

L'étude du deuxième cas d'égalité des triangles étant un peu plus délicate, elle est séparée en trois théorèmes. Dans les deux premiers, deux angles sont égaux, ainsi que les côtés des angles égaux, et il sépare les cas dans lesquels deux des angles égaux valent deux droits ou pas. Et dans le troisième les côtés égaux ne sont pas les côtés des deux angles égaux.

Théorème 14 des Sphériques de Ménélaüs :

« S'il y a deux figures trilatères, telles que deux angles d'une des deux soient égaux à deux angles de l'autre, chacun à chacun, et si les deux côtés adjacents aux angles égaux sont égaux, alors les côtés restants des deux triangles sont égaux.

Soit deux figures trilatères ABG et DEZ, l'angle en A soit égal à l'angle en D, l'angle en G soit égal à l'angle en Z et le côté AG soit égal au côté DZ.

Alors je dis que le côté AB est égal au côté DE et que le côté BG est égal au côté EZ. »[53]

53 *Die Sphärik, op. cit.,* p. 133

$$\begin{array}{c} \hat{A}=\hat{D}=\dfrac{\pi}{2} \\ \hat{G}=\hat{Z} \\ AG=DZ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} AB=DE \\ BG=EZ \end{array}$$

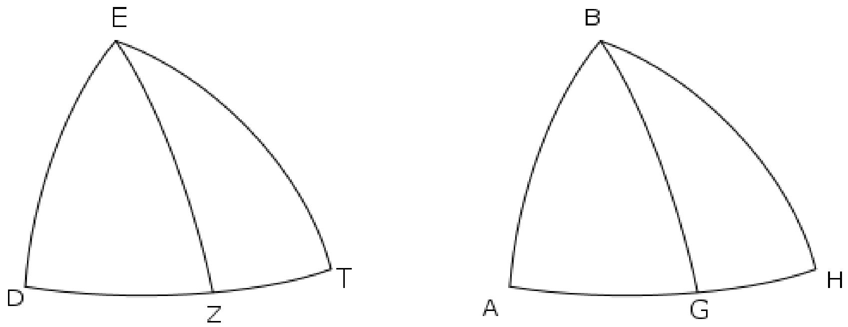


Figure 34

Démonstration :

« (A) Nous supposons d'abord que les deux angles aux deux points A, D soient droits. (a) Si les deux angles aux deux points B, E sont également deux droits, alors les deux points G, Z sont deux pôles des deux cercles AB, DE et il est clair que AB est égal à DE et BG à EZ. (b) Si les deux angles aux deux points B, E ne sont pas deux droits, alors les deux points G, Z ne sont pas deux pôles des deux cercles AB, DE et soient les deux points T, H les deux pôles qui se trouvent sur les deux cercles AG, DZ. Nous menons un arc de grand cercle qui passe par les deux points B, H, à savoir l'arc BH, et un arc de grand cercle qui passe par les deux points E, T, à savoir l'arc ET. Chacun des deux segments de cercle AH, HB est égal au segment de cercle correspondant DT, TE parce que chacun d'entre eux est un quadrant. L'arc AG est aussi égal à l'arc DZ. Comme chacun des deux angles ABH, DET est droit, les deux angles GBH, ZET ne sont pas égaux à deux droits, les deux figures HGB, ZTE sont trilatères et un angle de l'une, à savoir BGH, est égal à un angle de l'autre, à savoir l'angle EZT. Et les côtés qui contiennent deux autres angles sont égaux entre eux, chacun à chacun, le côté GH égal au côté ZT, le côté BH égal au côté ET, et les deux angles restants, à savoir les deux angles GBH, ZET, sont ensemble différents de deux droits. Ainsi – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 13 – le côté BG est égal au côté EZ. Alors, les deux côtés AG, BG sont égaux aux deux côtés DZ, ZE, chacun à chacun, et ces côtés contiennent deux angles égaux. Par conséquent, le côté AB est égal au côté DE. [I 4] »

Théorème 15 des Sphériques de Ménélaüs :

« (B) Posons maintenant les deux angles aux deux points A, D comme différents de deux droits.

$$\left.\begin{array}{c}\hat{A}=\hat{D}\neq\frac{\pi}{2}\\ \hat{G}=\hat{Z}\\ AG=DZ\end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{c}AB=DE\\ BG=EZ\end{array}$$

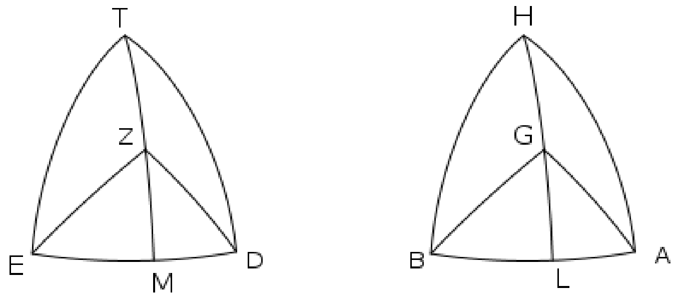


Figure 35

Nous posons le point H comme pôle du cercle AB et menons un arc de grand cercle qui passe par les deux points G, H, à savoir l'arc HGL (Théodose I 20). L'angle DZT soit égal à l'angle AGH, c'est-à-dire que nous le posons ainsi [I 1]. Nous prolongeons TZ au delà de Z jusqu'au point M du côté ED. Alors l'angle LGB est égal à l'angle MZE parce que l'angle EZD est égal à l'angle AGB et que l'angle MZD est égal à l'angle AGL : il reste l'angle MZE égal à l'angle BGL. Nous posons l'arc ZT égal à l'arc GH et menons un arc de grand cercle par les deux points D, T, à savoir l'arc DT. Comme les deux côtés AG, GH sont égaux aux côtés DZ, ZD, chacun à chacun, et que ces côtés contiennent deux angles égaux, la base AH est égale à la base DT, l'angle GAH est égal à l'angle ZDT et l'angle AHG est égal à l'angle DTZ. [Proposition I 4] Or, l'angle BAG est égal à l'angle EDZ. Donc l'angle BAH est égal à l'angle EDT L'angle BAH est un droit. Par conséquent, l'angle EDT est un droit. L'arc DT est un quadrant. Donc le point T est un pôle du cercle ED [Théodose I. 20]. Nous prenons d'entre elles les deux arcs BH, ET. Alors les deux figures BGH, EZT sont trilatères et un angle de l'une, à savoir l'angle BGH, est égal à un angle de l'autre, à savoir l'angle EZT, et deux autres angles, les deux angles BHG, ETZ sont contenus par des côtés égaux chacun à chacun : le côté GH est égal au côté TZ, le côté BH au côté ET et les deux angles restants, GBH et ZET, sont ensemble différents de deux droits. Donc le côté BG est égal au côté EZ – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 13 –. Par conséquent, le côté BA est égal au côté DE [Prposition I 4], parce que BG, GA sont égaux à EZ, ZD et chaque paire contient un même angle. Par conséquent, la base AB est égale à la base ED. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Une preuve plus courte que celle faite par Ménélaüs, : Elle consiste en cela que les deux côtés AB, GB s'appliquent sont superposés sur les deux côtés DE, ZE, si AG est appliqué sur DZ. Donc les côtés et les angles sont égaux entre eux. Et c'est ce qu'il fallait démontrer ! »[54]

54 *Die Sphärik, op. cit.,* p. 134-35

Théorème 17 des Sphèriques de Ménélaüs

« S'il y a deux figures trilatères, telles que deux angles d'une des deux soient égaux à deux angles de l'autre, chacun à chacun, et qu'un des deux côtés, opposés aux de ces deux angles d'une des deux qui sont égéux aux deux de l'autre, est égal à son correspondant de l'autre triangle, c'est-à-dire à celui qui est opposé à l'angle de l'autre triangle qui est égal à cet angle, et que les deux côtés opposés aux angles égaux, ne soient pas égaux ensemble à un demi-cercle,alors les côtés restants des deux triangles sont égaux.

Soit les deux figures trilatères ABG, DEZ, l'angle en A soit égal à l'angle en D et celui en G à celui en Z et le côté BG de l'une d'elles soit égal au côté EZ de l'autre et les deux côtés AB, ED ne sont pas ensemble égaux à un demi-cercle. Alors, je dis que le côté AB est égal au côté DE et le côté AG est égal au côté DZ. »

$$\begin{array}{c} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{G} = \hat{Z} \\ BG = EZ \\ AB+ED \neq \pi \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} AB=DE \\ AG=DZ \end{array}$$

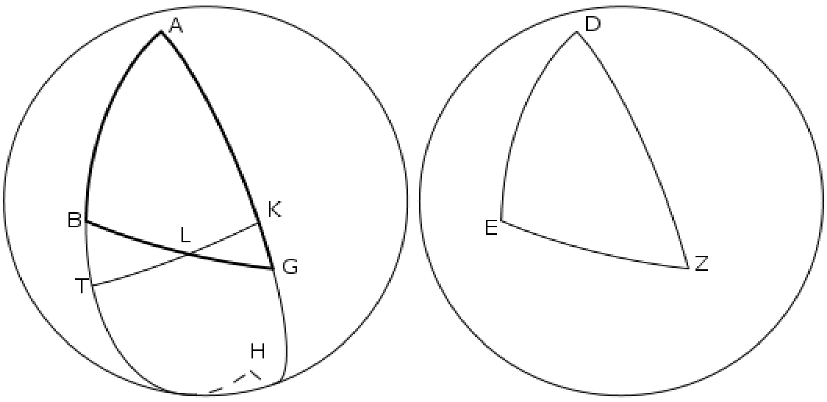


Figure 36

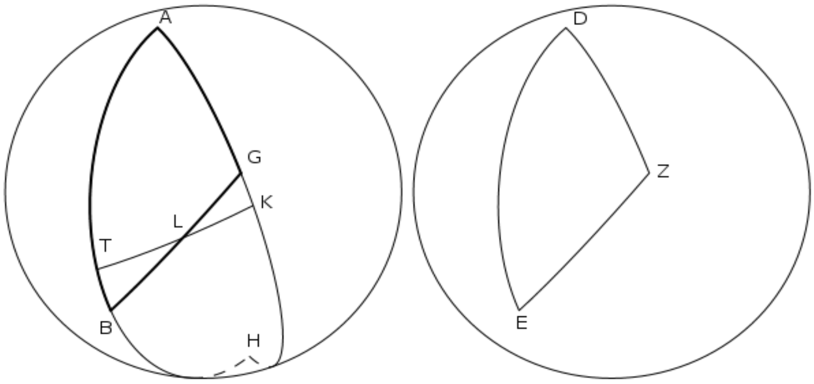


Figure 37

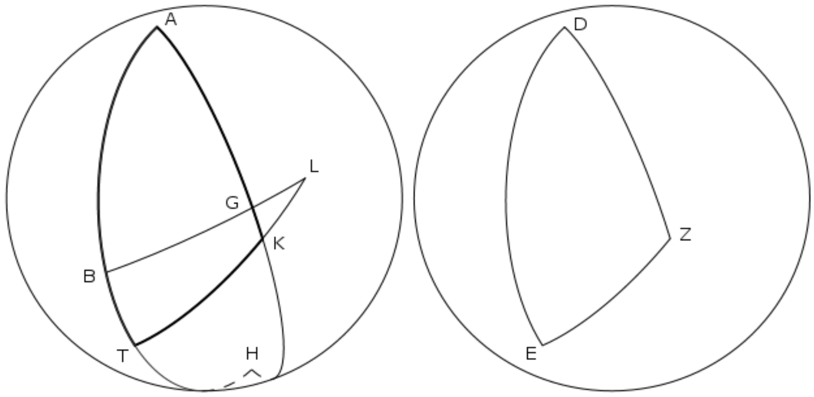


Figure 38

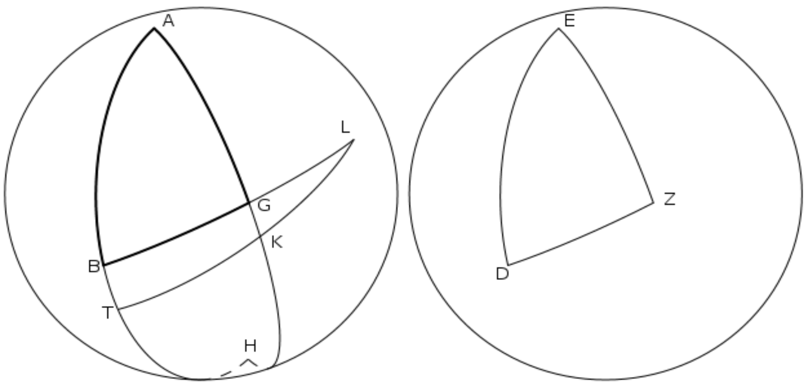


Figure 39

Démonstration :

« En effet, nous prolongeons les deux arcs AB, AG jusqu'en H. Comme les deux arcs AB, DE ne sont pas égaux à un demi-cercle, l'arc BH n'est pas égal à l'arc DE. Nous posons alors l'arc TH égal à l'arc DE et l'arc KH égal à l'arc DZ. L'angle en H est égal à l'angle en D, car il est égal à l'angle en A. Par conséquent, la base KT est égale à la base EZ [Proposition I 4], qui est égale à BG, et l'angle TKH est égal à l'angle DZE qui est égal à l'angle en G. Donc l'angle en G est égal à l'angle en K. Par conséquent, le côté GL est égal au côté KL [Proposition I 3]. Il reste que BL est égal à TL étant donné que BG est égal à TK. C'est pourquoi l'angle BTK est égal à l'angle TBG [Proposition I 2] et l'angle HTK est égal à l'angle DEZ. Donc l'angle en B est égal à l'angle en E. L'angle en G était égal à l'angle en Z et le côté BG égal au côté EZ. Par conséquent, le côté AB est égal au côté DE et le côté AG est égal au côté DZ [Propositions I 14/15]. Et c'est ce qu'il fallait démontrer ! »

Nous arrivons donc à la conclusion que dans ce cas d'égalité des triangles, les choses se passent moins bien que dans le plan. Nous avons vu précédemment que dans le plan la position des côtés égaux n'a aucune importance si bien sûr les angles et les côtés sont dans le même ordre dans les deux triangles. Ici, si les côtés égaux ne sont pas les côtés des angles, nous avons égalités des triangles à la condition que leur somme ne fasse pas deux droits. Il pourrait être intéressant de regarder à quoi est dû ce phénomène.

d) Cas supplémentaire

Ménélaüs offre même une précision aux conditions nécessaires pour que les triangles soient tout de même égaux dans la situation du deuxième cas d'égalité des triangles lorsque les côtés égaux ne sont pas les côtés des angles égaux :

Théorème 16 des Sphériques de Ménélaüs

« S'il y a deux figures trilatères, que deux côtés d'une des deux sont égaux à deux côtés de l'autre, chacun à chacun, que les angles opposés aux côtés égaux sont égaux et qu'aucun des deux points aux sommets *des deux figures n'est un pôle de la base de cette figure, alors les deux bases sont égales.*

Soient deux figures ABG, DEZ telles que le côté AB soit égal au côté DE, le côté BG soit égal au côté EZ, et que les deux angles aux deux points A, G soient égaux aux deux angles aux deux points D, Z, chacun à chacun, et telles que pas un des points B, E ne soit un pôle des deux cercles AG, DZ, alors, je dis que AG est égal à DZ. »

$$\left.\begin{array}{c} AB = DE \\ BG = EZ \\ \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{G} = \hat{Z} \\ B \neq \text{pôle de } AG \\ E \neq \text{pôle de } DZ \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{c} AB=DE \\ BG=EZ \end{array}$$

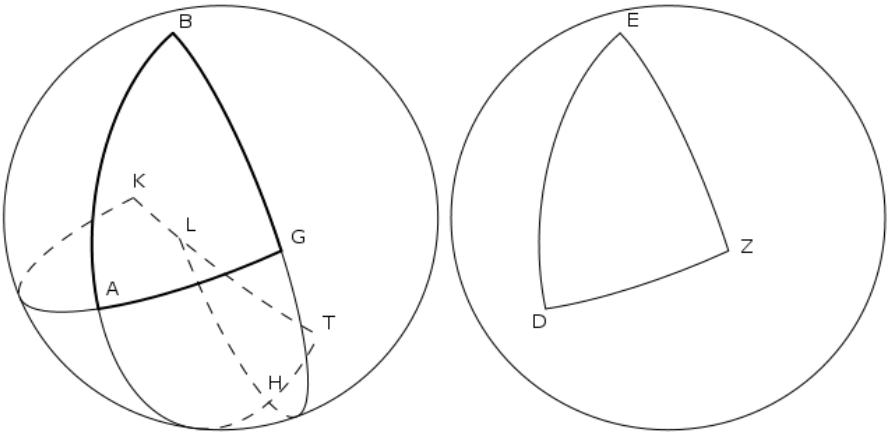


Figure 40

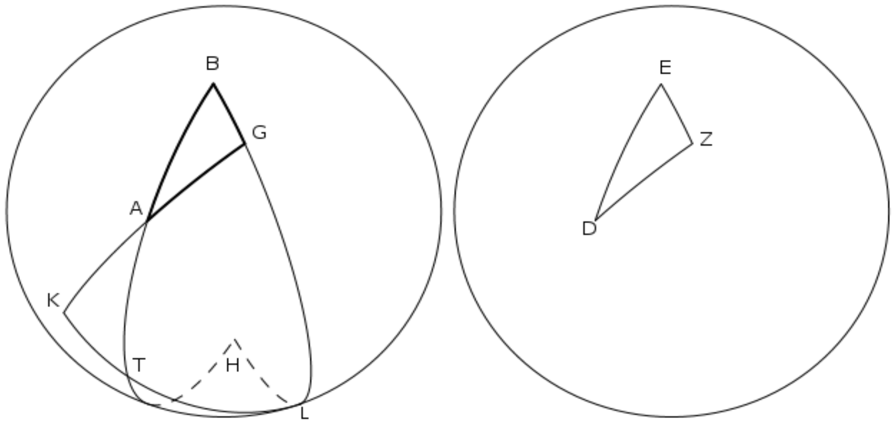


Figure 41

Démonstration :

« En effet, nous complétons les deux demi-cercles BAH, BGH. Comme le point B n'est pas pôle du cercle AG, un des deux arcs AB, BG est différent à un quadrant. Soit AB l'arc qui est différent d'un quadrant.Par conséquent, cet arc n'est pas égal à l'arc AH. Nous posons l'arc AT égal à l'arc AB. Nous prolongeons l'arc GA jusqu'en K, et posons AK égal à DZ ; nous menons l'arc KT et le prolongeons jusqu'en L. Comme les deux côtés KA, AT sont égaux aux deux côtés ZD, DE, chacun à chacun, c'est-à-dire le côté adjacent à l'angle qui est égal à l'angle adjacent à l'autre côté, et que les deux angles contenus par les côtés égaux, sont égaux, la base KT est égale à la base EZ [Proposition 4], qui est égale à BG, et l'angle au point K est égal à l'angle au point Z, qui est égal à l'angle au point G, et l'angle au point T est égal à l'angle au point E. Or l'angle au point G est égal à l'angle au point K : donc les deux arcs KL, LG seront ensemble égaux à un demi-cercle [Proposition 10]. L'arc KT est égal à l'arc BG. Par conséquent, les deux arcs TL, LB sont ensemble égaux à un demi-cercle. C'est pourquoi l'angle en T, qui est égal à l'angle en E, est égal à l'angle LBT [Proposition 1]. Par conséquent, la base AG est égale à la base DZ [Proposition 4]. Ceci correspond à la première figure !

En ce qui concerne la deuxième figure, nous procédons de la manière suivante :

Comme les deux arcs KL, LG sont ensemble égaux à un demi-cercle, et l'arc KT est égal à l'arc BG, l'arc LB est égal à l'arc TL prolongé à un demi-cercle. Il est alors clair que l'arc LT est égal à l'arc LH. Par conséquent, l'angle LHT est égal à l'angle LTH qui est égal à l'angle en E [Proposition 2]. C'est pour cela que l'angle LHT sera égal à l'angle DEZ. Donc la base AG est égale à la base DZ [Proposition 4]. Et c'est ce qu'il fallait démontrer ! »

Tout en sortant un peu du cadre du cas d'égalité des triangles, puisqu'habituellement nous supposons que seuls trois éléments sont égaux, nous obtenons ici une amélioration du deuxième cas d'égalité des triangles. Si les côtés égaux ne sont pas les côtés des angles égaux, en rajoutant de plus que les côtés qui ne sont pas non-plus les côtés des angles sont égaux, et que les sommets des angles qui ne sont pas supposés égaux ne sont pas les pôles des côtés qui ne sont pas supposés égaux, nous avons égalité.

e) Cas d'égalité des triangles lorsque leurs angles sont égaux deux à deux

Comme nous l'avons vu plus haut, l'aire d'un triangle est égale à la différence entre la somme de ses angles et π. Ce qui a pour conséquence, si l'on connaît ses angles, d'avoir son aire, et d'empêcher les cas de similitude entre les triangles. Le théorème 18 nous démontre ce que l'on pourrait appeler le quatrième cas d'égalité des triangles : Si deux triangles ont leurs angles égaux deux à deux, alors ils sont égaux.

Théorème 18 de Ménélaüs

« S'il y a deux figures trilatères, et que les trois angles de l'une d'entre elles sont égaux aux trois angles de l'autre, chacun à chacun, alors les côtés opposés aux angles égaux sont égaux.

Soient deux figures trilatères ABG, DEZ telles que l'angle en A soit égal à l'angle en D, l'angle en B soit égal à l'angle en E et l'angle en G soit égal à l'angle en Z. Alors je dis qu'aussi le côté AB est égal au côté DE, le côté BG au côté EZ et le côté AG au côté DZ. »

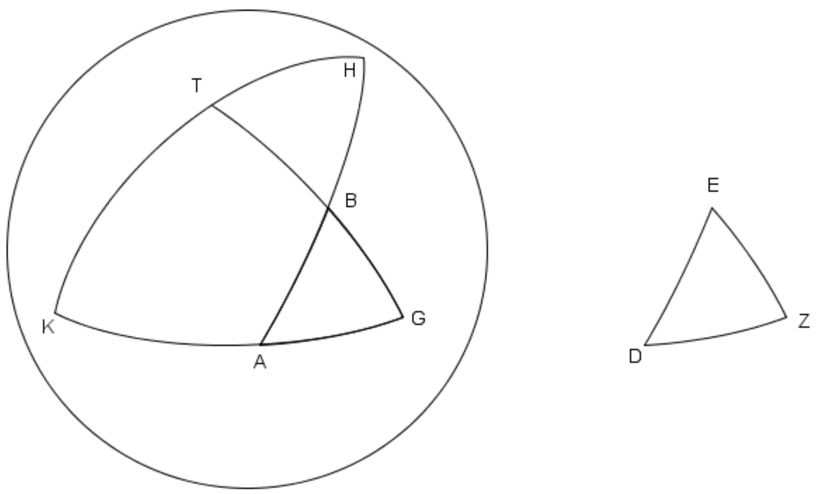


Figure 42

Démonstration :

« Si nous prolongeons les deux côtés AB, BG, posons BH égal à DE et BT égal à EZ, menons l'arc TH et prolongeons-le jusqu'en K, alors les deux côtés BH, BT sont égaux aux deux côtés DE, EZ – chacun à chacun – et ces côtés contiennent des angles égaux. C'est pourquoi la base TH est égale à la base DZ – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 4 – et l'angle en H est égal à l'angle en D qui est égal à celui en A, et celui en T est égal à celui en Z qui est égal à celui en G. Comme l'angle en T est égal à l'angle en G, les deux arcs TK, KG sont ensemble égaux à un demi-cercle [Proposition 10].

Et à nouveau ! Comme l'angle en H était égal à l'angle en A, les deux arcs HK, KA seront ensemble égaux à un demi-cercle [Proposition 10]. Par conséquent, les deux arcs TK, KG ensemble sont égaux aux deux arcs HK, KA ensemble. Il reste l'arc TH égal à l'arc AG, or l'arc TH est égal à l'arc DZ. Par conséquent, l'arc AG est égal à l'arc DZ.

De la même manière, il sera également clair que le côté AB est égal au côté DE et le côté BG au côté EZ. Et c'est ce qu'il fallait démontrer ! »

f) Conclusion

Concluons en considérant chacun des cas séparément. Dans le plan, si les angles sont deux à deux égaux, les triangles ne sont pas forcément égaux, on dit qu'ils sont semblables, tandis que sur la sphère, cela implique l'égalité des triangles. Dans le troisième cas d'égalité, c'est-à-dire si les côtés sont égaux chacun à chacun, tout se passe de même manière que dans le plan : les triangles sont égaux. Dans le premier cas d'égalité, c'est-à-dire lorsque les deux triangles ont deux côtés et un angle sont égaux, dans le plan il fallait que les côtés égaux contiennent les angles égaux, sur la sphère, l'égalité des triangles est assurée quelle que soit la position des angles égaux, à la condition bien sûr que l'ordre soit le même. Dans le deuxième cas d'égalité, c'est-à-dire lorsque deux angles et un côté sont égaux, dans le plan, à condition toujours que l'ordre soit respecté, la position des côtés égaux n'importe pas, alors que sur la sphère les choses sont un peu plus complexes : si les côtés égaux ne sont pas les côtés des angles, nous avons égalité des triangles à la condition que leur somme ne fasse pas deux droits. Et toujours si les côtés égaux ne sont pas les côtés des angles égaux, en rajoutant de plus que les côtés qui ne sont pas non-plus les côtés des angles sont égaux, et que les sommets des angles qui ne sont pas supposés égaux ne sont pas les pôles des côtés qui ne sont pas supposés égaux, nous avons égalité.

Donc sur la sphère, si deux triangles ont trois de leurs éléments égaux (relativement dans le bon ordre), alors ils sont égaux, sauf si ces éléments sont deux angles et un côté et que les côtés égaux ne sont pas les côtés des angles, dans ce cas il faut que la somme des côtés égaux ne fasse pas deux droits ou que l'on ait de plus que les côtés qui ne sont pas non-plus les côtés des angles soient égaux, et que les sommets des angles que ne sont pas supposés égaux ne soient pas les pôles des côtés qui ne sont pas supposés égaux.

III Différentes représentations

1) Projection à partir d'un pôle sur le plan équateur : projection stéréographique

Cadre :
$(E, \vec{E})$ un espace affine euclidien de dimension 3, S la sphère de centre O et de rayon 1,N un point de S et π le plan orthogonal au vecteur $\overrightarrow{ON}$ passant par O. π est identifié au plan complexe.

Définition :
« On appelle *projection stéréographique* l'application φ de S\{N} sur le plan π de l'équateur de N qui à tout point P de S\{N} associe le point P' intersection du plan π avec la droite (NP). »[55]

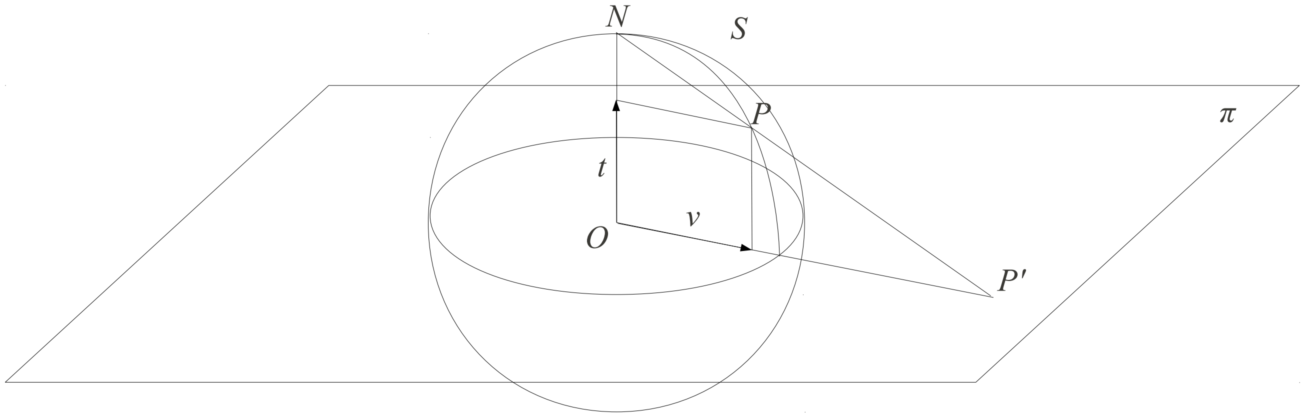


Figure 43

Un point de S est repéré par sa projection orthogonale sur le plan complexe π et par l'abscisse de sa projection orthogonale sur la droite $(O, \overrightarrow{ON})$.

Théorème :
« φ est une application bijective de S\{N} dans le plan π. De plus φ et φ^{-1} (la fonction inverse associée) sont définies de la manière suivante :

$$\varphi : S\setminus\{N\} \to \pi \qquad\qquad \varphi^{-1} : \pi \to S\setminus\{N\}$$

$$(v, t) \to \frac{v}{1-t} \qquad\qquad z \to \left(\frac{2z}{|z^2|+1}, \frac{|z^2|-1}{|z^2|+1}\right)$$

Démonstration :
On obtient facilement le résultat en remarquant qu'en considérant un point P et son image P' par φ de coordonnées respectives (v,t) et z, nous avons : v = z(1 – t). »

□

55 D'après *Analyse Complexe*, Eric Amar, Etienne Matheron

Proposition :

La projection stéréographique est conforme[56].

Démonstration :

Soient D_1 et D_2 deux droites distinctes du plan π se coupant en un point P'. Les antécédents de D_1 et D_2 par φ sont deux cercles de la sphère S se coupant en N et un point P. L'antécédent d'un point de notre plan par φ est l'intersection de la droite reliant notre point et le pôle avec la sphère S, alors l'antécédent d'une droite de notre plan est l'intersection du plan contenant notre droite et le pôle avec notre sphère. Soient π' le plan tangent à la sphère S en N, π_1, π_2 les plans contenant N et respectivement les droites D_1 et D_2 et D_1', D_2' les intersections de π' avec respectivement π_1 et π_2. D'une part, par symétrie, l'angle formé par les cercles $\varphi^{-1}(D_1)$ et $\varphi^{-1}(D_2)$ en P est le même que l'angle formé par ces deux mêmes cercles en N. D_1' et D_2' sont respectivement les droites tangentes aux cercles $\varphi^{-1}(D_1)$ et $\varphi^{-1}(D_2)$ elles forment donc le même angle que ces cercles. D'autre part, comme π et π' sont parallèles, D_1' et D_2' forment le même angle que D_1 et D_2. On en conclut donc que l'angle renfermé par D_1 et D_2 est égal à l'angle renfermé par $\varphi^{-1}(D_1)$ et $\varphi^{-1}(D_2)$ en P.

□

Que les angles soient conservés pourrait nous laisser penser que cette représentation peut être utile dans notre étude. Le problème se trouve dans le fait que les droites de notre plan sont les images des cercles de la sphère passant par le pôle et non les grands cercles contrairement à la sphère de Ménélaüs. Nous pourrions à chaque fois nous placer de manière à ce que nos grands cercles passent par le pôle, malheureusement cela nous amènerait à ne considérer que deux droites à la fois. A partir de cette représentation, nous aurons donc du mal à retrouver les propriétés qui sont étudiées dans la sphère de Ménélaüs.

2) Projection à partir d'un pôle sur n'importe quel plan de l'espace : Inversion

Cadre :

$(E, \vec{E})$ un espace affine euclidien de dimension 3, O un point de E et S la sphère de centre O et de rayon r.

Définition :

« Soient Ω un point de E et k un réel non-nul. On appelle *inversion de pôle Ω et de puissance k* l'application $i_{\Omega,k}$ de $E \setminus \{\Omega\}$ dans lui-même définie par :

$$i_{\Omega,k}(M) = \Omega + \frac{k}{\Omega M^2}\overrightarrow{\Omega M}$$

L'inversion $i_{\Omega,k}$ est dite positive (resp. négative) si k>0 (resp. k<0). »[57]

Remarque :

Une inversion n'est pas une isométrie, les distances ne sont pas conservées.

56 Conserve les angles

57 D'après *Géométrie*, P Tauvel, 2005, DUNOD

Proposition :

« Soit Ω un point de S, k un réel.
Alors $i_{\Omega,k}(S\backslash\{\Omega\})$ est le plan H orthogonal à la droite $(O\Omega)$ et contenant $i_{\Omega,k}(C)$ où C est le point antipodal à Ω. »[58]

Démonstration :

Prenons un repère ayant Ω comme origine pour simplifier les calculs. Soit donc, $\Re=(\Omega,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé tel que $\overrightarrow{\Omega O}=r\,\vec{i}$.

D'où $C=\Omega+2r\,\vec{i}$ et $i_{\Omega,k}(C)=\frac{k}{2r}\vec{i}$.

Soit H l'hyperplan dont une des équations est : $x=\frac{k}{2r}$

Une équation de S est : $x^2+y^2+z^2-2rx=0$

Soient $M=\Omega+x_M\vec{i}+y_M\vec{j}+z_M\vec{k}\in E\backslash\{\Omega\}$ et $N:=i_{\Omega,k}(M)=\Omega+x_N\vec{i}+y_N\vec{j}+z_N\vec{k}$.

On a $x_1\neq 0$ car $M\neq\Omega$.

$$\text{Si } M\in S,\ x_N=\frac{k\,x_M}{\Omega M^2}=\frac{k\,x_M}{x_M^2+y_M^2+z_M^2}=\frac{k}{2r}\text{, d'où } i_{\Omega,k}(M)\in H.$$

Et réciproquement soit $M=\Omega+x_M\vec{i}+y_M\vec{j}+z_M\vec{k}\in H$ *et* $N=i_{\Omega,k}^{-1}(M)=\Omega+x_N\vec{i}+y_N\vec{j}+z_N\vec{k}$:

$$\begin{aligned}
x_N^2+y_N^2+z_N^2-2rx_N&=\left(\frac{kx_M}{\Omega M^2}\right)^2+\left(\frac{ky_M}{\Omega M^2}\right)^2+\left(\frac{kz_M}{\Omega M^2}\right)^2-\frac{2kx_M}{\Omega M^2}\quad \text{car } N=i_{\Omega,k}^{-1}(M)\\
&=\frac{k^2(x_M^2+y_M^2+z_M^2)}{(x_M^2+y_M^2+z_M^2)^2}-\frac{2kx_M}{x_M^2+y_M^2+z_M^2}\\
&=\frac{k^2-2kx_M}{x_M^2+y_M^2+z_M^2}\\
&=0\quad\text{car}\quad M\in H
\end{aligned}$$

❑

Si l'on se place dans le cas k = 2r², c'est-à-dire C = O, alors il s'agit d'une projection stéréographique.

De la même manière, on obtient les mêmes conclusions que pour la projection stéréographique. Donc si nous effectuons une projection à partir de n'importe quel point de la sphère sur n'importe quel plan perpendiculaire au diamètre correspondant, nous ne pouvons pas retrouver directement les propriétés qui sont énoncées dans la sphère de Ménélaüs : les calculs reviendraient à fonder une autre géométrie sur la sphère.

58 D'après *Géométrie*, P Tauvel, 2005, DUNOD

3) Inversion à partir du centre de la sphère sur un plan

Nous pouvons tout d'abord nous demander si il est possible d'adapter l'inversion de manière à projeter les points de la sphère sur un plan à partir du centre de la sphère.

Soient S = S(O,R) la sphère de centre O et de rayon 1, et k un réel non nul. L'inversion de pôle O et de puissance k est définie sur E\{O} par :

$$i_{O,k}(M) = O + \frac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM} \quad \forall M \in E\setminus\{O\}$$

En particulier pour tout point M de S : $i_{O,k}(M) = O + kR^{-2}\overrightarrow{OM}$

L'inversion que nous considérons n'est autre que l'homothétie de centre O et de rapport kR^{-2} et transforme donc notre sphère en la sphère $S(O, kR^{-2})$.

L'inversion ne nous permettra pas de projeter une sphère sur un plan par rapport à son centre.

4) Représentation comme partie de l'espace euclidien de dim. 3 :

Cadre :

E un espace affine euclidien de dimension 3, O un point de E et S la sphère de centre O et de rayon R.

Définition :

« Étant donné deux points A et B de S, on appelle distance de A à B dans S et on note $d_S(A,B)$, ou encore AB, le réel :
longueur du segment [AB] = $R \times \theta$,
où θ est la mesure, comprise entre 0 et π, de l'angle géométrique $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
On notera $d_E(A,B)$ la longueur de la corde $[AB]_E$. »[59]

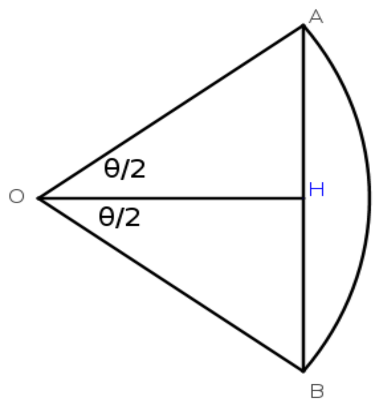


Figure 44

59 *Géométries élémentaires (tome 1)*, Henri LOMBARDI, 1999, pufc

$d_S(A,B)$ est la distance entre A et B sur notre sphère S c'est à dire la longueur d'arc de grand cercle entre A et B, tandis que $d_E(A,B)$ est la distance entre A et B dans notre espace euclidien tridimensionnel E, et R le rayon de notre sphère.

« On a les relations suivantes entre θ, R, $d_S(A,B)$, $d_E(A,B)$:

$$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=R^2.\cos(\theta),\quad d_S(A,B)=R\,\theta$$
$$\sin\left(\frac{d_S(A,B)}{2R}\right)=\frac{d_E(A,B)}{2R}$$

d'où $d_E(A,B)\leqslant d_S(A,B)\leqslant\frac{\pi}{2}d_E(A,B)$

On en déduit aussi, puisque la fonction sinus est strictement croissante sur l'intervalle [0,π/2] :

$$d_S(A,B)\leqslant d_S(C,D)\ \Leftrightarrow\ d_E(A,B)\leqslant d_E(C,D)$$

La dernière relation montre que d_S et d_E définissent les mêmes « isométries » et la même « relation de plus grande proximité » sur S.

VI Rappels d'astronomie

1) Notions fondamentales

Pour aborder les applications qu'a pu avoir la sphère de Ménélaüs en astronomie, il est important d'en avoir les bases. Nous allons donc ensemble parcourir les notions nécessaires d'astronomie qui nous permettront de comprendre l'utilité des différents théorèmes de Ménélaüs.

Un première chose, que l'on remarque facilement en observant le ciel, quelle que soit la période de l'année et quelle que soit l'heure à laquelle on observe le ciel, les différentes configurations d'étoiles sont identiques. Ce qui se traduit mathématiquement par le fait que la distance angulaire de deux étoiles quelconques reste inchangée quelle que soit l'instant auquel on les observe. Ceci est du au fait que le rayon de l'ellipse ($1{,}5.10^{11}$ m) que parcourt la terre autour du soleil est négligeable par rapport à la distance qui nous sépare des étoiles (la plus proche : 4.10^{16} m), car comme le montre le dessin ci-dessous, si les étoiles se trouvaient proches de nous, la distance angulaire de deux étoiles observées pourrait varier : donc significativement les distances angulaires entre les étoiles sont sensiblement les mêmes si les deux points d'observation sont très proches ou si les étoiles s'en trouvent très éloignées, ce qui, dans les deux cas, revient au même que la négligeabilité dont nous avons parlé.

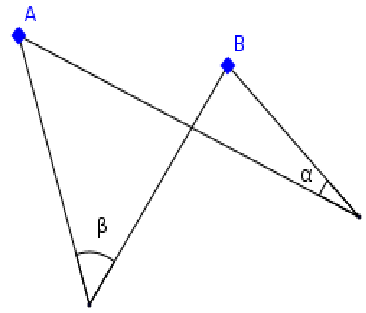


Figure 45

Du point de vue d'un observateur se trouvant sur la terre, le ciel est comme une immense sphère dont il est le centre et qui tourne d'une certaine manière autour de celui-ci. Cette sphère est appelée en astronomie : sphère des fixes.

Nous avons vu que la rotation de la terre autour du soleil n'influençait en aucune façon la vision que l'on a du ciel, par contre, la rotation de la terre sur elle-même implique que la sphère des fixes tourne autour d'un axe, comme nous pouvons le voir sur la photo ci-dessous.

Figure 46

Le ciel peut donc être représenté par une sphère d'un certain rayon centrée en l'observateur et tournant autour d'un axe fixe. C'est pourquoi la sphère de Ménélaüs a eu autant d'applications en astronomie.

2) Systèmes de coordonnées[60]

60 Tiré de *Astronomie fondamentale,* Gianni PASCOLI, DUNOD, 2000, p.11

Maintenant que nous avons déterminé l'espace dans lequel nous travaillons, il faut établir un système de coordonnées afin de pouvoir s'y repérer. L'axe autour duquel la voûte céleste tourne passe par ce qu'on appelle le pôle nord céleste (le point P sur la figure).

a) Coordonnées azimutales ou horizontales

Venons-en maintenant au repérage des astres sur la sphère céleste. Le premier système de coordonnées que nous allons étudier est le plus immédiat – mais c'est aussi le moins pratique, comme nous le verrons ci-dessous, pour les observations astronomiques. Considérons le plan horizontal et la verticale du lieu d'observation (définie par la direction du fil à plomb). La verticale perce la sphère céleste en deux points diamétralement opposés. L'un, situé au-dessus de l'observateur O, s'appelle le zénith Z et, l'autre, diamétralement opposé, le nadir (invisible pour cet observateur). Le plan horizontal coupe la sphère céleste suivant un grand cercle appelé horizon (fig. ci-dessous). Le plan passant par le zénith et contenant la direction nord-sud définit le plan méridien du lieu d'observation.

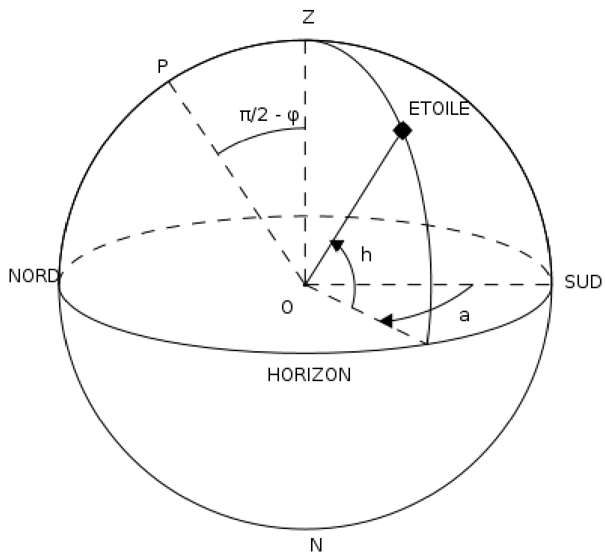


Figure 47

Une étoile donnée est alors repérée par deux coordonnées angulaires : sa hauteur h au dessus ou au dessous de l'horizon et son azimut a, angle qui situe, dans le plan horizontal, la position de l'étoile par rapport à la direction du sud. On mesure a de 0 à 360°, positivement vers l'ouest (sens rétrograde) et h de -90° à +90°. On utilise aussi parfois la distance zénithale z à la place de h : z = 90° - h.

Malheureusement, ce type de repérage présente un inconvénient majeur. En effet, le lieu d'observation étant spécifié, a et h varient tous deux en fonction du temps. De plus, à un même instant, les valeurs prises respectivement par a et h pour une étoile donnée, différent en des lieux distincts à la surface du globe.

b) Coordonnées horaires et coordonnées équatoriales

Le fait que a et h varient en fonction du temps résulte bien évidemment de la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.

L'axe des pôle terrestres constitue donc une direction privilégiée. Cet axe coupe la sphère des fixes en deux points diamétralement opposés, appelés pôles célestes, P pôle Nord ou boréal et P' pôle Sud ou austral (fig. ci-dessous). Le grand cercle perpendiculaire à cet axe définit l'équateur céleste, prolongement imaginaire de l'équateur terrestre.

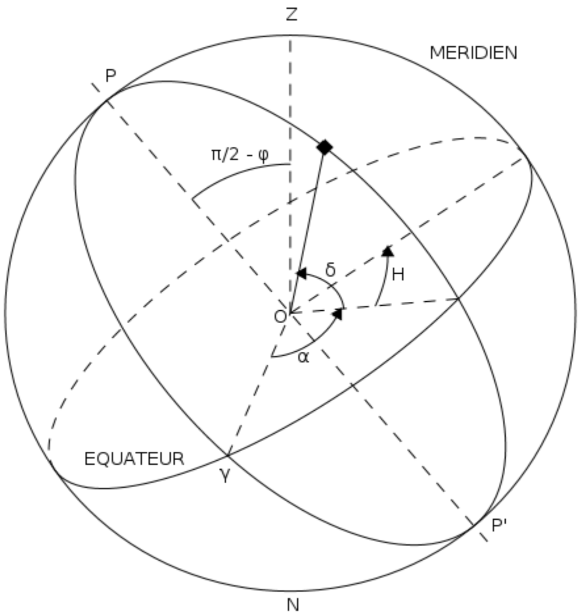


Figure 48

Tout observateur, même peu exercé, sait qu'une étoile quelconque semble décrire chaque nuit un arc de petit cercle, parallèle à l'équateur céleste, image transposée de la rotation de la Terre autour de son axe.

Le plan fondamental du système de coordonnées horaires est la plan de l'équateur et la sphère céleste est alors quadrillée par un réseau de cercles orthogonaux qui sont la réplique exacte des méridiens et parallèles terrestres. Toutefois, les demi-grands cercles dont les extrémités sont les pôles célestes sont désormais appelés cercles horaires, le nom de méridiens étant exclusivement réservé au demi-grand cercle contenant à la fois les pôles et le zénith du lieu d'observation. Tout astre est alors repéré par sa déclinaison δ, hauteur par rapport à l'équateur du parallèle céleste passant par cet astre, et par son angle horaire H, angle dièdre entre le cercle horaire de l'astre considéré et le méridien du lieu. La déclinaison δ est invariante et elle est comprise entre 0° et +90° au-dessus du plan de l'équateur et entre 0° et -90° au-dessous de ce plan.

L'angle horaire H est compté positivement vers l'ouest (sens rétrograde) à partir du méridien et il est défini en heures, minutes et seconde (le cercle équatorial étant alors gradué de 0 à 24 heures).

La verticale du lieu d'observation et l'axe du monde P'P sont séparés par l'angle $\pi/2 - \varphi$ où φ désigne la latitude du lieu d'observation.

c) Coordonnées écliptiques

Un troisième système de coordonnés est aussi utilisé. Le plan fondamental est ici le plan de l'orbite terrestre (plan contenant la trajectoire de la Terre autour du Soleil). Ce plan est appelé plan de l'écliptique.

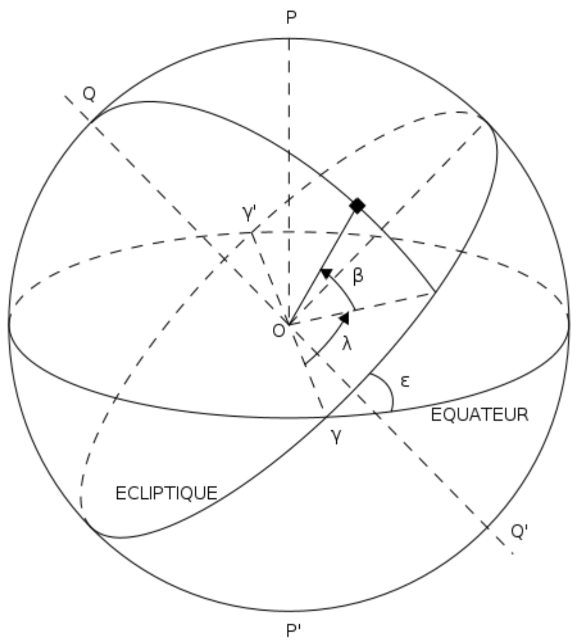


Figure 49

L'intersection de ce plan avec la sphère des fixes définit le cercle écliptique ou écliptique. L'écliptique coupe l'équateur céleste au point γ (équinoxe vernal) et en un autre point diamétralement opposé, dénoté γ' (équinoxe d'automne). L'angle ε représente l'obliquité de l'écliptique avec celui de l'écliptique ; c'est l'angle que fait le plan de l'écliptique avec celui de l'équateur, $\varepsilon \approx 23°26'$. Tout astre est repéré par sa longitude écliptique λ et sa latitude écliptique β.

V Application des *Sphériques* en astronomie

1) Livre II

Les applications majeures en astronomie du deuxième livre se trouvent dans les propositions 5 à 24 qui permettent une étude du sens de variations de diverses grandeurs. Nous allons étudier en particulier la proposition 21 de ce deuxième livre.

Proposition 21 du deuxième livre :

Si, sur une sphère, un grand cercle touche un certain parallèle et si l'on découpe sur lui deux arcs égaux situés entre le point de contact et le plus grand des parallèles, et si on décrit des cercles passant par les extrémités de ces arcs, d'une part des cercles parallèles et d'autre part des grands cercles passant par le pôle de ces parallèles, alors les parallèles découperont sur les grands cercles passant par le pôle des arcs inégaux, tels que celui qui est le plus proche du plus grand des parallèles est plus grand que celui qui en est le plus éloigné, et les grands cercles passant par le pôle découperont sur le plus grand des parallèles des arcs inégaux, tels que celui qui est le plus proche du point d'intersection entre le grand cercle primitif et le plus grand des parallèles est le plus petit que celui qui en est le plus éloigné.

Soient AB un des parallèles ayant G pour pôle, DE un grand cercle qui le touche au point D et EW le plus grand des parallèles. Découpons les arcs égaux DZ et HT entre les deux points D et E et décrivons par les points Z, H et T les parallèles ZK, HL et TM, et, parmi les grands cercles passant par le pôle des parallèles précités, les cercles GDW, GZN, GHS et GTO. Nous disons que LM est plus grand que DK et que OS est plus petit que NW.[61]

Si DZ = HT, alors LM > DK et OS < NW

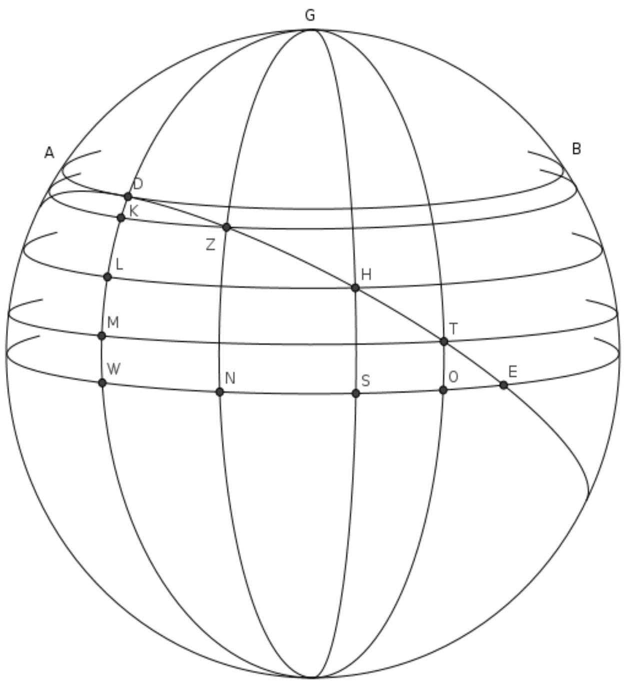


Figure 50

61 Inspiré de la traduction de R. NADAL, A. TAHA, P. PINEL

Al-Tūsī nous donne dans son livre, l'application de ce théorème en astronomie :

La dernière des deux conclusions de cette proposition montre que la déclinaison d'un arc quelconque proche du solstice est plus petite que la déclinaison d'un arc égal, mais qui en est plus éloigné. La première conclusion montre que dans la sphère droite l'ascension d'un arc proche du solstice est plus grande que l'ascension d'un arc égal, mais qui est plus éloigné.[62]

2) Théorème de Ménélaüs

Théorème 1 du troisième livre de Ménélaüs : (théorème de Ménélaüs)

Soient GE, BD deux arcs qui se rencontrent au point A. Soient GD et BE deux arcs issus des points G, D qui se coupent au point Z. Chacun de ces quatre arcs appartienne à la circonférence d'un grand cercle de la sphère, et chacun soit plus petit qu'une demi circonférence.
Alors je dis que le rapport de sin GE à sin EA est composé du rapport du sinus de l'arc GZ au sinus de l'arc ZD et du rapport du sinus de l'arc DB au sinus de l'arc BA.

$$\frac{\sin GE}{\sin EA}=\frac{\sin GZ}{\sin ZD}\cdot\frac{\sin DB}{\sin BA}$$

Démonstration :

Soit H le centre de la sphère. Menons les droites HZ, HB, HE et relions AD. Alors la corde AD et le rayon BH sont coplanaires. Alors soit HB est parallèle à AD soit elle ne l'est pas. Si elles ne sont pas parallèles, alors elles se rencontrent d'un des deux côtés. Soit elles se rencontrent du côté de D soit du côté de A.

(a) Si elles se rencontrent du côté de D, alors soit le point T leur intersection. Ensuite menons la corde AG ; alors elle coupe le rayon EH par exemple en K. Nous menons la corde GD ; alors elle coupe le rayon ZH par exemple en L. Comme les droites HE, HZ, HT vont toutes du centre du cercle EZB sa circonférence, elles se trouvent toutes dans le même plan. Ainsi les points K, L, T se trouvent dans le même plan. Le triangle AGD se trouve dans le plan des deux côtés AG, AD et ADT est rectiligne dans ce plan. Ainsi le point T est dans ce plan. C'est pourquoi les points K, L, T sont dans deux plans dont l'un est le plan du cercle EZB et dont l'autre est le plan du triangle AGD. Ainsi ils se trouvent sur la ligne d'intersection. La ligne d'intersection de deux plans sécants est une ligne droite. Ainsi la ligne qui passe par les points K, L, T est une droite. Ainsi se trouvent entre les deux droites sécantes AG, AT les deux droites GD, TK qui se coupent en L. C'est pourquoi le rapport de GK à KA est composé du rapport de GL à LD et du rapport de DT à TA. Or le rapport de GK à KA est égal au rapport du sinus de l'arc GE au sinus de l'arc EA, et le rapport de GL à LD est égal au rapport du sinus de l'arc GZ au sinus de l'arc ZD, et le rapport DT sur TA est égal au rapport du sinus de l'arc BD au sinus de l'arc BA. Ainsi le rapport du sinus de l'arc GE au sinus de l'arc EA est composé du rapport du sinus de l'arc GZ au sinus de l'arc ZD et du rapport du sinus de l'arc DB au sinus de l'arc BA.[63]

$$\frac{GK}{KA}=\frac{GL}{LD}\cdot\frac{DT}{TA} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin GE}{\sin EA}=\frac{\sin GZ}{\sin ZD}\cdot\frac{\sin DB}{\sin BA}$$

62 Inspiré de la traduction de R. NADAL, A. TAHA, P. PINEL
63 Traduction personnelle

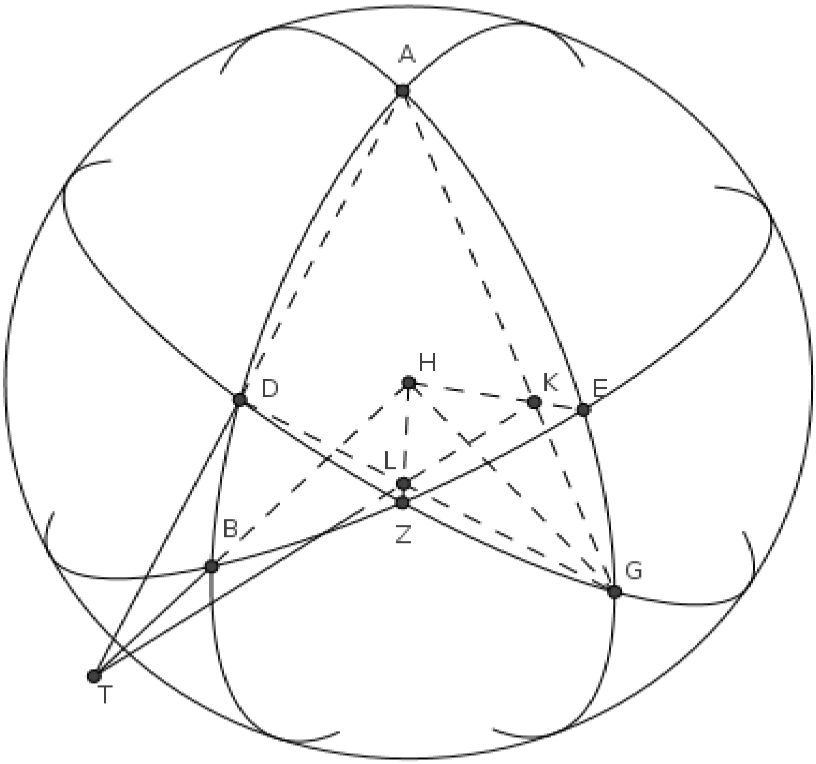


Figure 51

(b) Si elles se rencontrent du côté de A, alors soit le point T leur intersection. Nous prolongeons les deux arcs BDA, BZE jusqu'à ce qu'ils rencontrent le diamètre {issus de B} et qu'ils se rencontrent au point K.[64]
D'après ce qui a été démontré, le rapport du sinus de GZ au sinus de ZD est composé du rapport du sinus de GE au sinus de EA et du rapport du sinus de AK au sinus de KD. Ainsi le rapport du sinus de GE, au troisième, au sinus de EA, au quatrième, est composé du produit du rapport du sinus de GZ, au premier, au sinus de ZD, au deuxième, et du rapport du sinus de KD, au sixième, au sinus de KA, au cinquième. Mais le sinus de KD est le sinus de BD, et le sinus de KA est le sinus de BA. Ainsi le rapport du sinus de GE au sinus de EA est composé du produit du rapport du sinus de GZ au sinus de ZD par le rapport du sinus de BD au sinus de BA.

$$\frac{sinGZ}{sinZD}=\frac{sinGE}{sinEA}\cdot\frac{sinAK}{sinKD} \quad \Rightarrow \quad \frac{sinGE}{sinEA}=\frac{sinGZ}{sinZD}\cdot\frac{sinKD}{sinKA} \quad \Rightarrow \quad \frac{sinGE}{sinEA}=\frac{sinGZ}{sinZD}\cdot\frac{sinBD}{sinBA}$$

(c) Et si AD est parallèle à BH, alors nous complétons le demi-cercle BAT et menons les deux cordes AG, DG. Nous menons à partir de D la perpendiculaire DS et à partir de A la perpendiculaire {sur la base BH} AO. Il s'ensuit qu'elles sont égales entre elles, parce que la figure est un parallélogramme. Ainsi le sinus de l'arc BD est égal au sinus de l'arc BA. Nous menons à partir du milieu, à savoir le point H, la droite de jonction EH. Alors elle coupe la corde AG en {un point}L.{Nous menons à partir de H la droite ZH. Alors elle coupe la corde DG en K} Comme le diamètre BT et l'arc EZB, la droite EH et le point L appartiennent à un et même plan, alors nous pouvons tirer dans le plan EZH à partir du point L une droite parallèle au diamètre. Elle est alors parallèle à AD. Et de même nous pouvons mener dans le plan ADG à partir du point L une droite parallèle à AD. Alors je dis que c'est la droite LK.

64 Deux grands cercles se rencontrent toujours en deux points antipodaux.

Si ce n'est pas le cas, alors soit la parallèle, dans le plan EZB, la droite LM et dans le plan ADG la droite LN. Il s'ensuit que les deux droites LM, LN sont parallèles entre elles et elles se rencontrent au même point. Nous avons une contradiction. Ainsi, à partir du point L, aucune droite n'est parallèle à la droite AD, à part la droite LK. Donc, dans le triangle ADG, il a été mené une droite parallèle à la base. C'est pourquoi le rapport du sinus de l'arc GE au sinus de l'arc EA est égal au rapport du sinus de l'arc GZ au sinus de l'arc ZD. Le rapport du sinus de BD au sinus de BA est le rapport d'égalité. C'est pourquoi le rapport du sinus de l'arc GE au sinus de l'arc EA est composé du produit du rapport du sinus de l'arc GZ au sinus de l'arc ZD et du rapport du sinus de l'arc DB au sinus de l'arc BA.

(d) Et je dis encore que le rapport du sinus de GA au sinus de AE est composé du rapport du sinus de GD au sinus de DZ et du rapport du sinus de BZ au sinus de BE[65].

Nous prolongeons GA, GD de telle sorte qu'ils se rencontrent à l'extrémité du diamètre. Ils se rencontrent au point T. Ainsi, entre les deux arcs TE, BE se coupent les deux arcs TZ, BA. C'est pourquoi le rapport du sinus de TA au sinus de EA est le produit du rapport du sinus de DT au sinus de DZ par le rapport du sinus de BZ sur le sinus de BE. Or le sinus de TA est égal au sinus de GA et le sinus de TD est égal au sinus de GD. C'est pourquoi le rapport du sinus de GA au sinus de AE est le produit du rapport du sinus de GD au sinus de DZ et du rapport du sinus de BZ au sinus de BE. Et c'est ce que nous voulions démontrer !

D'après ce que nous avons vu dans la partie II, 4), nous arrivons au même résultat d'une manière bien plus rapide. Nous avons :

$$\sin\left(\frac{d_S(A,B)}{2\mathrm{R}}\right)=\frac{d_E(A,B)}{2\mathrm{R}}$$

D'où si l'on suppose que le rayon vaut ½ :

$$\frac{\sin d_S(G,E)}{\sin d_S(E,A)}=\frac{\sin d_S(G,Z)}{\sin d_S(Z,D)}\cdot\frac{\sin d_S(D,B)}{\sin d_S(B,A)}\Leftrightarrow\frac{d_E(G,E)}{d_E(E,A)}=\frac{d_E(G,Z)}{d_E(Z,D)}\cdot\frac{d_E(D,B)}{d_E(B,A)}$$

Nous avons un polyèdre dont les points appartiennent à la sphère.
On aurait tendance à dire que si l'on aplatit notre polyèdre, on obtient le théorème de Ménélaüs dans le plan.
En regardant la projection de la sphère sur le plan, la figure obtenue vérifie cette égalité.
Si l'on considère deux segments de notre polyèdre, ils engendrent un plan, et le prolongement du premier segment se trouve dans ce plan. Pour avoir le second aligné avec le premier il faut faire un une rotation autour d'un axe perpendiculaire à notre plan. Or les angles que nous avons ne sont pas forcément droits. Conclusion : nous pouvons aplatir notre polyèdre mais si les angles formés par les intersections au centre de la figure ne sont pas droits, ce qui est d'ailleurs impossible, nous n'aurons pas l'alignement que nous avions sur la sphère.

65 Si ABD est considéré comme la transversale

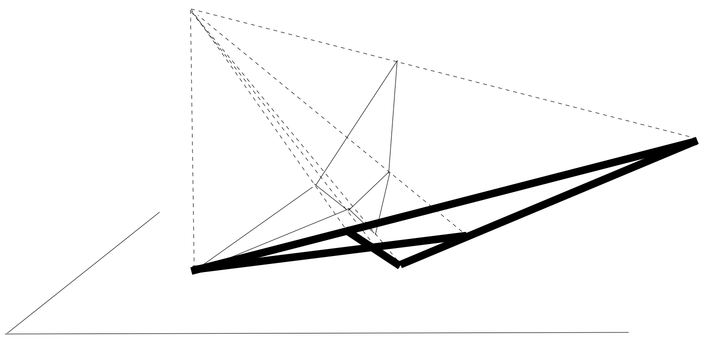


Figure 52

Annexe :

Traduction des livres 1 à 3 de Ménélaüs :
plus haut je donne la traduction de Robert NADAL, Abdelkaddous TAHA et Pierre PINEL appartenant au groupe de recherche en histoire des mathématiques de Toulouse, mais pour rester en accord avec la traduction que j'ai faite, je ne donnerai pas la leur.

Dieu l'a rendu heureux

Au nom de Dieu, de la pitié charitable

Protection et aide soient avec lui

Menelaus a dit : « Moi, Roi Alladi, ai vu que cet art de la démonstration à laquelle j'ai réfléchi et que je veux t'exposer, est un bel et merveilleux art, et cela parce qu'il laisse apparaître beaucoup de choses, sur la surface extérieure de la sphère, choses que l'on aurait du mal à croire qu'elles existent.

Tout d'abord, je commence par te présenter la démonstration de ces choses, dans lesquelles je cherche avec toi la correspondance, pour faire tendre l'esprit vers ce qui se trouve dans les démonstrations, et en particulier pour savoir lesquelles d'entre elles, représentent la subtilité et la finesse mêmes et pour s'approprier ce que dans tout cela l'âme aime et convoite.

L'Homme est capable, s'il aime la leçon, de faire de cette chose un outil, et d'en construire et d'en dégager les théorèmes et les problèmes correspondants, comme nous l'avons fait dans beaucoup de cas lorsque nous avons cherché une unicité d'écritures en géométrie et d'écritures astronomiques.

Nous avons retrouvé les choses pour lesquelles nos prédécesseurs ont déjà eu raison, les faits généraux, qu'un autre a énoncés et affirmés pour un cas unique et qui sont déjà démontrés par l'absurde dans les discours qui sont rédigés à propos des éléments de la théorie de la géométrie sphérique, généralement ces démonstrations-là et également leurs réciproques seront détaillées et présentées avec les limites nécessaires qui en font partie et de manière directe. »

Premier livre :

Définitions
1. Celle des figures sur la surface de la sphère, que j'appelle trilatère est celle que trois arcs de grands cercles contiennent, où chacun de ces arcs est plus petit qu'un demi-cercle.
2. Ses angles sont ceux que ces arcs-là contiennent pour qu'il résulte la même surface triangulaire et que les arcs donnés la contiennent.
3. Les angles que j'appelle angles égaux contenus par des arcs de grands cercles sont ceux pour lesquels les arcs d'inclinaison de leurs demi-cercles respectifs sont égaux, c'est-à-dire l'arc du cercle qui passe par les pôles des deux cercles et contenu par les deux demi-cercles.

Théorème 1 (report d'un angle)

Nous voulons expliquer comment sur un arc de grand cercle donné et en un point donné sur celui-ci nous construisons un angle, à partir d'un arc de grand cercle donné et d'un point donné, égal à un angle donné contenu par deux grands cercles.

Soit donc l'arc de grand cercle donné l'arc AB, le point donné le point B et l'angle donné contenu par deux grands cercles l'angle GDE. Nous voulons construire au point B de l'arc AB un angle égal à l'angle GDE.

Démonstration :

Posons donc le point D comme pôle et décrivons avec un intervalle quelconque l'arc GE; posons le point B comme pôle et avec le même intervalle décrivons l'arc AZ et retranchons de cet arc un arc égal à GE, à savoir AZ et menons un arc de grand cercle qui passe par les deux points B et Z, à savoir BZ.

Comme l'arc GE est égal à l'arc AZ, que les deux angles qui leur sont opposés aux angles au centre correspondants sont égaux et sont identifiés à la « la pente » des demi-cercles donnés, l'angle ABZ est égal à l'angle GDE.

Comme les deux arcs GD et DE sont des arcs de grands cercles qui passent par le pôle du cercle GE, l'intersection de ceux-ci avec le cercle GE sont deux diamètres du cercle GE. Ils se coupent ainsi au centre du cercle, et l'intersection des deux cercles GD et DE, c'est-à-dire le diamètre de la sphère passant par le point D, est une perpendiculaire au plan du cercle GE abaissée sur son centre. Donc les intersections avec le cercle GE sont deux perpendiculaires sur celle-ci issues d'un de leurs points dans les deux plans. Elles comprennent un angle qui est opposé à l'arc GE. De même dans le triangle ABZ. Comme les deux arcs AZ et GE sont égaux et qu'ils sont tous les deux parties de cercles égaux, les deux angles, mentionnés au centre des deux cercles dits AZ et GE sont égaux.

Si les deux cercles AZ et GE sont des grands cercles, alors ils sont égaux et parties des deux cercles qui passent par les pôles des cercles AB, BZ, GD et DE, et les deux angles que contiennent ses diamètres d'extrémités les points A, Z, G et E sont également égaux et ils sont mesurés par les deux angles B et D.

Et si les deux arcs AZ et GE ne sont pas des parties de grands cercles, alors ils sont parallèles aux deux grands cercles décrits autour des deux pôles B et D. Par conséquent, leurs diamètres d'extrémités A, Z et G, E, sont parallèles aux diamètres des deux grands cercles menés de l'extrémité des quadrants issus des points B et D sur les cercles AB, BZ et GD, DE qui est le point de passage des deux cercles qui passent par les pôles des cercles AB, BZ, GD, DE. Et parce que ces diamètres sont parallèles, les angles qu'ils contiennent sont égaux, c'est-à-dire dans chaque cas deux angles au centre de deux cercles parallèles contenus par des diamètres qui sont parallèles aux diamètres des grands cercles donnés.

Par conséquent, l'angle au centre opposé à AZ est égal à l'angle au centre opposé à GE. Donc les quatre angles sont égaux. Ces diamètres sont parallèles, parce que chacun des deux cercles AB, BZ et des deux cercles GD, DE coupe deux cercles parallèles en deux de leurs diamètres.

Théorème 2 (isocèle)

Les deux angles à la base des figures trilatères isocèles sont égaux.

Soit la figure triangulaire isocèle dans laquelle AB soit égal à BG.

Alors je dis que l'angle BAG est égal à l'angle BGA.[66]

Démonstration :

Soit la figure ABG triangulaire et isocèle telle que AB et BG soient égaux.

Alors je dis que l'angle BAG est égal à l'angle BGA.

Comme nous posons le point A comme pôle et comme nous dessinons l'arc GD avec la mesure G, nous posons le point G comme pôle, de la même manière, nous dessinons l'arc AE avec la mesure A, et nous complétons les arcs ABD et GDE, alors l'arc AD et égal à l'arc GE est l'arc BE est égal à l'arc BD.[67]

66 Proposition 5 des Éléments d'Euclide.

67 soit D l'intersection du cercle de pôle A passant par G et du cercle AB, et soit E l'intersection du cercle de pôle G passant par A et du cercle GB.

Ainsi, on trouve sur les deux diamètres, qui partent des deux points D, E, deux arcs du mêmes cercles, à savoir des deux arcs AE, DG, deux segments de cercle de même taille, à savoir les deux arcs AD, GE de manière verticale, et sur ces deux-là sont découpés deux arcs de même taille , à savoir BE, BD qui ne sont pas les moitiés des deux segments. De B on a tiré deux arcs de même taille BA, BG.[68]
Ainsi l'arc GD est égal à l'arc AE et c'est pourquoi les deux angles au centre, qui correspondent à ces deux arcs, sont égaux. Mais l'angle d'entre eux à qui l'arc GD correspond est l'angle de la pente des deux demi-cercles desquels AB et AG sont des segments, et l'angle d'entre eux à qui l'arc AE correspond est l'angle de la pente des deux demi-cercles desquels GB et GA sont des segments. D'où l'angle BAG est égal à l'angle BGA. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 3 (isocèle)

Si deux des angles d'une figure triangulaire sont égaux, alors les deux côtés qui leur sont opposés sont égaux.

Soit la figure triangulaire ABG telle que les deux angles de celle-ci aux deux points A, G soient égaux. Alors je dis que le côté AB est égal au côté BG.[69]

Démonstration :

Comme nous dessinons à partir des deux pôles A, G deux arcs de grands cercles ZED, THD, alors le point D est le pôle de TAGZ. Ainsi l'arc DHT est égal à l'arc DEZ. L'arc TH est égal à l'arc ZE, parce que l'angle en A est égal à l'angle en G. Ainsi, on trouve sur les deux diamètres, qui partent des deux points H, E, deux arcs de mêmes cercles, à savoir des deux arcs GBH, ABE, deux segments de cercle de même taille de manière verticale, qui se trouve de manière verticale sur les deux cercles nommés, et les deux arcs HD, DE de ceux là sont égaux. La droite qui est tirée entre les points D, B, est une ligne commune. Donc l'arc BH est égal à l'arc BE. C'est pourquoi l'arc BA doit est égal à l'arc BG. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 4 (égalité : 3 côtés => angle, 2 côtés + 1 angle => 3ème côté)

Si deux côtés d'une figure trilatère sont égaux à deux côtés d'une autre figure trilatère, chacun à chacun si la base est égale à la base, alors les deux angles des deux figures contenus par les grands côtés égaux sont égaux, et si l'angle est égal à l'angle, alors la base est égale à la base.

Soient deux figures trilatères ABG, DEZ, et soit le côté AB égal au côté DE, et le côté BG égal au côté EZ.

Je dis que si la base AG est égale à la base DZ, alors l'angle au point B est égal à l'angle au point E, et que si l'angle au point B est égale à l'angle au point E, alors la base AG est égale à la base DZ.

Démonstration :

Comme nous posons les deux points B, E comme pôles et décrivons avec l'intervalle des deux points A, D deux arcs de cercle AH, DT, alors ces deux cercles sont égaux. Comme l'arc BG est égal à l'arc EZ et l'arc BH à l'arc ET, l'arc GH doit être égal à l'arc ZT. Ainsi sur leurs deux diamètres issus des deux points H, T s'élèvent deux segments de cercle perpendiculaires égaux, à savoir les deux dont sont retranchés les deux arcs égaux GH, TZ qui sont plus petits que la moitié des deux segments, et les deux arcs GA, ZD, qui sont égaux, ont été menés. Par conséquent, l'arc AH est égal à l'arc DT (Théod. II 11 et Eucl. III 29[70]). Donc l'angle en B est égal à l'angle en E (Proposition I 1). Et nous montrons de même que si l'angle en B est égal à l'angle en E, alors la base AG est égale à la base DZ, parce que l'arc AH est égal à l'arc DT. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

68 Soit A' et G', les centres des cercles des arcs GD et EA respectivement. Nos diamètres G'E et A'D se coupent en B'. BB' est perpendiculaire à nos deux diamètres.
69 Proposition 6 des Éléments d'Euclide.
70 *Les Éléments*, op. cit. p. 445 : *« Dans les cercles égaux, les circonférences égales sont sous-tendues par des droites égales »*

Théorème 5 (inégalité triangulaire)

Dans chaque figure triangulaire, deux de ses côtés, qui peuvent être pris au hasard, sont plus grands que le côté restant.

On donne une figure triangulaire ABG.

Alors je dis que chaque paire de côtés de la figure ABG est plus grande que le côté restant, pris de quelque façon que ce soit.

Démonstration :

Comme nous supposons que BG est son plus grand côté, posons le point B comme pôle et décrivons avec la mesure du point A le cercle AHD, complétons le cercle BGED et posons le point E comme le point qui est diamétralement opposé au point B, alors le point E est l'autre pôle des deux pôles de AHD.

Comme le cercle GED est un grand cercle et passe par les deux pôles du cercle AHD, alors il le coupe en deux et lui est perpendiculaire. Comme l'arc ED est égal à l'arc EH et comme un morceau de cercle, à savoir HGED, arrive perpendiculairement sur un cercle, à savoir AHD, et l'arc de ce segment est coupé en G en deux parties inégales dont GH est la plus petite, alors l'arc GH est le plus petit arc qui est tiré à partir du point G jusqu'en l'arc AHD. Ainsi l'arc AG est plus grand que l'arc GH et l'arc AB est plus grand que l'arc BG. Ainsi les deux arcs AB, AG sont plus grands que l'arc BG. Est c'est ce que nous voulions démontrer.

S'il n'aime pas la démonstration directe, alors il peut le démontrer de la manière suivante à l'aide de la preuve antithétique.

Le côté BG est le plus long côté du triangle ABG. Alors je dis que la somme AB, AG, de quelque manière que ce soit, est plus grande que celui-ci.

Si ce n'est pas le cas, alors soit BG égal aux deux côtés AB, AG. Nous prolongeons BA du côté de A et posons AD égal à AG et menons DG en tant qu'arc de grand cercle. Comme AG, AD sont égaux, alors les deux angles AGD, ADG sont égaux. Et à nouveau ! Comme BD, BG sont égaux, alors les deux angles BGD, BDG sont égaux. Par conséquent les deux angles BGD, AGD sont égaux, le plus grand et le plus petit. Nous avons une contradiction ! Par conséquent, le côté BG n'est pas égal à la somme des deux côtés AB, AG. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 6 (triangle inclus dans un autre : PROBLEME LA FIGURE NE CORRESPOND PAS)

Si, sur un des côtés d'une figure triangulaire, se dressent deux autres côtés, qui ne sont pas des côtés de cette figure, et s'ils se rencontrent à l'intérieur de cette figure-là, alors ils sont tous les deux plus petits que les deux côtés de notre première figure.

Nous menons à savoir à partir de la base AG à l'intérieur de la figure triangulaire ABG à partir des deux points A, G les deux côtés AD, GD. Ils peuvent se rencontrer à l'intérieur de la figure triangulaire. Alors je dis que AB, BG sont ensemble plus grands que AD, DG ensemble.

Démonstration :

Comme nous prolongeons GD jusqu'en H sur le côté AB, alors GB, BH sont ensemble plus grands que GH – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 5 – et nous supposons que AH leur est adjacent. Alors les deux côtés GB, BA sont plus grands que les deux côtés GH, HA. De même les deux côté AH, HD sont ensemble plus grands que le côté AD. Ainsi les deux côtés GH, AH sont ensemble plus grands que les deux côtés GD, DA ensemble. Par conséquent, les deux côtés AB, BG sont ensemble beaucoup plus grands que les côtés AD, DG ensemble. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 7

Le plus grand angle de chaque figure triangulaire est opposé au plus long côté.

Soit ABG une figure triangulaire, telle que l'angle au point A soit plus grand que l'angle au point G.

Alors je dis que son côté BG est plus long que le côté AB.

Comme nous posons l'angle DAG égal à son angle en G, alors le côté AD est égal au côté DG. Nous posons que BD est adjacent. Par conséquent, GB est exactement égal aux deux côtés AD, DB. Par contre les deux côtés AD, DB sont plus grands que AB. Par conséquent, le côté BG est plus grand que le côté AB. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 8 (th 4 + inégalité)

S'il y a deux figures trilatères, telles que deux côtés de l'une des deux soient égaux à deux côtés de l'autre, chacun à chacun, et l'angle, d'un de ceux que deux côtés différents de ces côtés renferment, soit plus grande que son segment opposé de l'autre, alors la base est plus grande que la base (la base du premier triangle est plus grande que celle du deuxième.)

Posons le côté AB du triangle ABG égal au côté DE et BG égal à EZ. Alors je dis que la base DZ, si l'angle en E est plus grand que l'angle en B, est plus grande que la base AG.

Démonstration :

Comme nous posons l'angle ABD égal à l'angle E, prenons BD égal à EZ et menons AD, alors AD est égal à la base DZ. Nous menons GD.

En ce qui concerne la figure 1, alors l'angle BDG est égal à l'angle BGD car BD, BG sont égaux. Ainsi l'angle ADG est plus petit que l'angle BGD. Par contre l'angle AGD est plus grand que l'angle BGD. Donc l'angle BGD est beaucoup plus grand que l'angle ADG. Par conséquent, la base AD est plus grande que la base AG.

Dans la deuxième figure, nous prolongeons BG à partir du point G jusqu'en J et BD à partir du point D jusqu'en N. Comme les deux angles BGD, BDG sont égaux, alors les deux angles JGD, GDN sont égaux. L'angle ADG est plus petit que l'angle GDN, et l'angle AGD est plus grand que JGD. Par conséquent, l'angle AGD est bien plus grand que l'angle ADG. Donc la base AD est plus grande que la base AG.

La réciproque de cela est démontrée par l'absurde. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 9

Le plus long côté de chaque figure triangulaire est situé de manière opposée au plus grand angle.

Soit une figure triangulaire ABG telle que son côté BG soit plus grand que le côté AB. Alors je dis que l'angle en A est plus grand que l'angle en G.

Démonstration :

Nous découpons à savoir l'arc DG de manière à ce qu'il soit égal à AB et dessinons un grand arc de cercle qui passe par les deux cercles A, D, et c'est l'arc AD. Comme les deux arcs AB, BD sont plus grands que l'arc AD et l'arc AB égal à l'arc DG, alors l'arc BG est plus grand que l'arc AD. Comme l'arc AB est égal à l'arc DG, et comme l'arc AG est adjacent, et la base BG est plus grande que la base AD, alors l'angle BAG est plus grand AGB – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 8 – Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 10 (angles alternes internes, un arc coupant deux demi-cercles)
(Angle extérieur : angle complémentaire)

Si deux côtés d'une figure trilatère sont plus petits qu'un demi-cercle, alors parmi les deux angles adjacents au côté restant, l'angle extérieur à ce côté est plus grand que l'angle intérieur et opposé, et si les deux côtés sont plus grands qu'un demi-cercle, alors l'angle extérieur est plus petit que l'angle intérieur et opposé, et si les deux côtés sont égaux à un demi-cercle, alors l'angle extérieur est égal à l'angle intérieur et opposé.

Soit une figure trilatère ABG dont les côtés AB, BG soient plus petits qu'un demi-cercle. Alors je dis que l'angle BGD est plus grand que l'angle BAG.[...]

Et à nouveau, il est clair que si les deux arcs AB, BG sont égaux à un demi-cercle, [...] l'angle BAG est égal à l'angle BGD.

Et à nouveau, si les deux arcs AB, BG sont plus grands qu'un demi-cercle, alors l'angle BDG est plus grand que l'angle BGD.

Démonstration :

Soit une figure triangulaire ABG telle que les côtés AB, BG soient ensemble plus petits qu'un demi-cercle. Alors je dis que l'angle BGD est plus grand que l'angle BAG.

Nous complétons à savoir les deux arcs ABD, AGD, chacun des deux arcs est un demi cercle. Comme les deux côtés AB, BG sont plus petits qu'un demi-cercle, alors ils sont plus petits que l'arc ABD. D'où l'arc BD reste plus grand que l'arc BG. Par conséquent, l'angle BDG qui est égal à l'angle BAG est plus petit que l'angle BGD - d'après ce qui a été montré dans le théorème 9.

Et à nouveau ! Si les deux côtés AB, BG sont supposés plus grands qu'un demi-cercle, alors l'arc BG est plus grand que l'arc restant BD. Par conséquent, l'angle BDG qui est égal à l'angle BAG est plus grand que l'angle cité BGD.

Et à nouveau il est clair que si les deux arcs AB, BG sont égaux à un demi-cercle, alors l'arc BG est égal à l'arc BD. En conséquence l'angle BAG est égal à l'angle BGD – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 2.

Et également la réciproque de nos propos est ainsi démontrée, à savoir que si l'angle BGD est égal à l'angle BAG, alors on montre par suite que la somme BA, BG est égale à un demi-cercle. Et si l'angle extérieur BGD est plus petit que l'angle intérieur qui lui est opposé, alors on montre par analogie de la démarche que AB, BG sont ensemble plus grands qu'un demi-cercle ; car l'angle BDG est plus grand que l'angle BGD, par conséquent l'arc BD est plus petit que l'arc BG.

Et à nouveau ! Si l'angle BGD est plus grand que l'angle BAG, il est plus grand que BDG. Par conséquent BD est plus grand que BG. Ainsi la somme BA, BG est plus petite qu'un demi-cercle. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 11 (somme des angles d'un triangle) (angle extérieur : angle complémentaire)

L'angle extérieur de toute figure trilatère est plus petit que les deux angles intérieurs qui lui sont opposés.

Soit ABG trilatère et soit AG prolongé jusqu'en D. Alors je dis que l'angle extérieur BGD est plus petit que les deux angles opposés en les deux points A, B.

Démonstration :

Nous construisons donc au point G de l'arc GD un angle qui est égal à l'angle BAG, à savoir l'angle DGE. Nous prolongeons AB au delà de B jusqu'à ce qu'il rencontre GE en E. Comme l'angle extérieur DEG du triangle AGE est égal à l'angle BAG, alors la somme AE, EG est un demi-cercle – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 10 –. Ainsi les deux angles BAG, ABG sont ensemble plus grands que l'angle extérieur BGD du triangle ABG.

Et ici, il est évident, que les angles A, B, G sont plus grands que deux droits ; car les deux angles aux deux extrémités de BG, c'est-à-dire les deux angles BGA, BGD sont égaux à deux droits et les angles A, B, G sont plus grands que ces deux-là. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 12 (égalité de triangles rectangles : 1 angle droit, 1 angle et 1 côté)

S'il y a deux figures trilatères, telles que deux de leurs angles de la base soient droits, les deux angles restants soient égaux mais pas droits, et les deux côtés, qui sont opposés aux angles droits, soient égaux, alors les deux côtés restants d'un des deux triangles sont égal aux deux côtés de l'autre chacun à chacun.

Soit deux figures trilatères, appelées ABG, DEZ, telles que chacun des deux angles en A, D soit droit, les deux angles en G,Z soient égaux, mais pas droits, et le côté BG soit égal au côté EZ.

Alors je dis que le côté AB est égal au côté DE et le côté AG est égal au côté DZ.

Démonstration :

Comme nous prolongeons l'arc AB jusqu'en K, posons l'arc GT égal à l'arc DZ, posons GH égal à chacun des deux arcs BG, EZ et traçons un arc de grand cercle qui passe par les deux points H, T et qui rencontre ABK en K, alors nous obtenons KTHL. Et de même nous dessinons un arc qui passe par les points K, G, à savoir KGL. Comme les deux côtés GH, GT sont égaux à EZ, ZD, chacun à chacun, et ces côtés renferment deux angles égaux, alors le côté TH est égal au côté ED – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 4.

Par conséquent, l'angle GTH est égal à l'angle EDZ. Par contre, l'angle EDZ est un angle droit. C'est pourquoi l'angle GTH est un droit. L'angle GAB est également un droit. Donc les deux points K, L sont les deux pôles du cercle dont AGT est un arc. Comme les deux arcs ABK, KTHL tombe perpendiculairement sur l'arc AGT, alors le côté est égal au côté GL. Par contre le côté BG est égal au côté GH. Ces côtés renferment deux angles égaux. Par conséquent, l'arc KB est égal à l'arc LH – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 4 – et la totalité de l'arc AK est égal à la totalité de l'arc LT. Ainsi il ne reste plus que l'arc AB qui est égal à l'arc TH. Nous avons montré que l'arc TH est égal à l'arc DE.

Et à nouveau ! Les deux côtés AB, BG sont égaux aux deux côtés GH, TH – chacun à chacun – et ces côtés renferment des angles égaux. Car étant donné que chacun des arcs KT, AK est un quadrant, TH est égal à AB et comme AK, KT sont égaux à un demi-cercle, alors son angle extérieur est égal à l'angle H. Par conséquent, le côté AG est égal au côté GT, qui lui-même est égal au côté DZ – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 4 –. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 13 (égalité de triangles : 2 côtés, 1 angle)

S'il y a deux figures trilatères telles qu'un angle de l'un soit égal à un angle de l'autre, que les deux côtés d'une des deux qui contiennent un des deux angles restants d'une des deux figures, sont égaux aux deux côtés qui contiennent l'angle correspondant de l'autre figure, chaque côté à chaque côté, et que les deux angles restants des deux figures ensemble ne sont pas égaux à deux droits, alors le côté restant est égal au côté restant et les angles restants sont égaux.

Soit deux figures trilatères, ABG, DEZ, l'angle en A soit égal à l'angle en D, le côté AG soit égal au côté DZ et le côté BG soit égal au côté EZ et les deux angles ABG, DEZ soient ensemble différents de deux angles droits.

Alors je dis que le côté AB est égal au côté DE.

Démonstration :

En effet nous prolongeons l'arc AB jusqu'en H. Comme l'angle HBG n'est pas égal à l'angle DEZ, nous élevons au point B de l'arc AB un angle égal à l'angle DEZ, à savoir GBT (Proposition I 1). Nous posons BT égal à DE et menons les deux arcs TG, TA. Comme l'angle GBT est égal à l'angle DEZ et comme les deux côtés GB, BT sont égaux aux deux côtés ZE, ED,la base GT est égale à la base DZ, qui est elle-même égale à AG – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 4 – et l'angle BTG est égal à l'angle EDZ, lequel angle est égal à l'angle BAG. L'angle GTA est lui aussi égal à l'angle TAG. Par conséquent, l'angle BAT est égal à l'angle BTA. Ainsi – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 3 – le côté BA est égal au côté BT qui est égal au côté DE. Par conséquent, le côté BA est égal au côté DE. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 14 (égalité de triangles : 1 côté, 2 angles) :

S'il y a deux figures trilatères, telles que deux angles d'une des deux soient égaux à deux angles de l'autre, chacun à chacun, et si les deux côtés adjacents aux angles égaux sont égaux, alors les côtés restants des deux triangles sont égaux.

Soit deux figures trilatères ABG et DEZ, l'angle en A soit égal à l'angle en D, l'angle en G soit égal à l'angle en Z et le côté AG soit égal au côté DZ.

Alors je dis que le côté AB est égal au côté DE et que le côté BG est égal au côté EZ.

Démonstration :

(A) Nous supposons d'abord que les deux angles aux deux points A, D soient droits. (a) Si les deux angles aux deux points B, E sont également deux droits, alors les deux points G, Z sont deux pôles des deux cercles AB, DE et il est clair que AB est égal à DE et BG à EZ. (b) Si les deux angles aux deux points B, E ne sont pas deux droits, alors les deux points G, Z ne sont pas deux pôles des deux cercles AB, DE et soient les deux points T, H les deux pôles qui se trouvent sur les deux cercles AG, DZ. Nous menons un arc de grand cercle qui passe par les deux points B, H, à savoir l'arc BH, et un arc de grand cercle qui passe par les deux points E, T, à savoir l'arc ET. Chacun des deux segments de cercle AH, HB est égal au segment de cercle correspondant DT, TE parce que chacun d'entre eux est un quadrant. L'arc AG est aussi égal à l'arc DZ. Comme chacun des deux angles ABH, DET est droit, les deux angles GBH, ZET ne sont pas égaux à deux droits, les deux figures HGB, ZTE sont trilatères et un angle de l'une, à savoir BGH, est égal à un angle de l'autre, à savoir l'angle EZT. Et les côtés qui contiennent deux autres angles sont égaux, chacun à chacun, le côté GH égal au côté ZT, le côté BH égal au côté ET, et les deux angles restants, à savoir les deux angles GBH, ZET, sont ensemble différents de deux droits. Ainsi – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 13 – le côté BG est égal au côté EZ. Alors, les deux côtés AG, BG sont égaux aux deux côtés DZ, ZE, chacun à chacun, et ces côtés contiennent deux angles égaux. Par conséquent, le côté AB est égal au côté DE. [I 4].

Théorème 15 (idem):

(B) Posons maintenant les deux angles aux deux points A, D comme différents de deux droits.

Nous posons le point H comme pôle du cercle AB et menons un arc de grand cercle qui passe par les deux points G, H, à savoir l'arc HGL (Théodose I 20). L'angle DZT soit égal à l'angle AGH, c'est-à-dire que nous le posons ainsi [I 1]. Nous prolongeons TZ au-delà de Z jusqu'au point M du côté ED. Alors l'angle LGB est égal à l'angle MZE parce que l'angle EZD est égal à l'angle AGB et que l'angle MZD est égal à l'angle AGL : il reste l'angle MZE égal à l'angle BGL. Nous posons l'arc ZT égal à l'arc GH et menons un arc de grand cercle par les deux points D, T, à savoir l'arc DT. Comme les deux côtés AG, GH sont égaux aux côtés DZ, ZD, chacun à chacun, et que ces côtés contiennent deux angles égaux, la base AH est égale à la base DT, l'angle GAH est égal à l'angle ZDT et l'angle AHG est égal à l'angle DTZ. [Proposition I 4] Or, l'angle BAG est égal à l'angle EDZ. Donc l'angle BAH est égal à l'angle EDT L'angle BAH est un droit. Par conséquent, l'angle EDT est un droit. L'arc DT est un quadrant. Donc le point T est un pôle du cercle ED [Théodose I. 20]. Nous prenons d'entre elles les deux arcs BH, ET. Alors les deux figures BGH, EZT sont trilatères et un angle de l'une, à savoir l'angle BGH, est égal à un angle de l'autre, à savoir l'angle EZT, et deux autres angles, les deux angles BHG, ETZ sont contenus par des côtés égaux chacun à chacun : le côté GH est égal au côté TZ, le côté BH au côté ET et les deux angles restants, GBH et ZET, sont ensemble différents de deux droits. Donc le côté BG est égal au côté EZ – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 13 –. Par conséquent, le côté BA est égal au côté DE [Prposition I 4], parce que BG, GA sont égaux à EZ, ZD et chaque paire contient un même angle. Par conséquent, la base AB est égale à la base ED. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Une preuve plus courte que celle faite par Ménélaüs, : Elle consiste en cela que les deux côtés AB, GB s'appliquent sont superposés sur les deux côtés DE, ZE, si AG est appliqué sur DZ. Donc les côtés et les angles sont égaux. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 16 (égalité de triangles : 2 côtés, 2 angles):

S’il y a deux figures trilatères, que deux côtés d’une des deux sont égaux à deux côtés de l’autre, chacun à chacun, que les angles opposés aux côtés égaux sont égaux et qu'aucun des deux points aux sommets des deux figures n'est un pôle de la base de cette figure, alors les deux bases sont égales.

Soient deux figures ABG, DEZ telles que le côté AB soit égal au côté DE, le côté BG soit égal au côté EZ, et que les deux angles aux deux points A, G soient égaux aux deux angles aux deux points D, Z, chacun à chacun, et telles que pas un des points B, E ne soit un pôle des deux cercles AG, DZ, alors, je dis que AG est égal à DZ.

Démonstration :

En effet, nous complétons les deux demi-cercles BAH, BGH. Comme le point B n'est pas pôle du cercle AG, un des deux arcs AB, BG est différent à un quadrant. Par conséquent, cet arc n'est pas égal à l'arc AH. Nous posons l'arc AT égal à l'arc AB. Nous prolongeons l'arc GA jusqu'en K, et posons AK égal à DZ ; nous menons l'arc KT et le prolongeons jusqu'en L. Comme les deux côtés KA, AT sont égaux aux deux côtés ZD, DE, chacun à chacun, c'est-à-dire le côté adjacent à l'angle qui est égal à l'angle adjacent à l'autre côté, et que les deux angles contenus par les côtés égaux, sont égaux, la base KT est égale à la base EZ [Proposition 4], qui est égale à BG, et l'angle au point K est égal à l'angle au point Z, qui est égal à l'angle au point G, et l'angle au point T est égal à l'angle au point E. Or l'angle au point G est égal à l'angle au point K : donc les deux arcs KL, LG seront ensemble égaux à un demi-cercle [Proposition 10]. L'arc KT est égal à l'arc BG. Par conséquent, les deux arcs TL, LB sont ensemble égaux à un demi-cercle. C'est pourquoi l'angle en T, qui est égal à l'angle en E, est égal à l'angle LBT [Proposition 1]. Par conséquent, la base AG est égale à la base DZ [Proposition 4]. Ceci correspond à la première figure !

En ce qui concerne la deuxième figure, nous procédons de la manière suivante :

Comme les deux arcs KL, LG sont ensemble égaux à un demi-cercle, et l'arc KT est égal à l'arc BG, l'arc LB est égal à l'arc TL prolongé à un demi-cercle. Il est alors clair que l'arc LT est égal à l'arc LH. Par conséquent, l'angle LHT est égal à l'angle LTH qui est égal à l'angle en E [Proposition 2]. C'est pour cela que l'angle LHT sera égal à l'angle DEZ. Donc la base AG est égale à la base DZ [Proposition 4]. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 17 (égalité de triangles : 1 côté, 2 angles) :

S’il y a deux figures trilatères, telles que deux angles d’une des deux soient égaux à deux angles de l’autre, chacun à chacun, et qu'un des deux côtés, opposé aux côtés de ces deux angles d'une des deux qui sont égaux aux deux angles de l'autre, est égal à son correspondant de l'autre triangle, c'est-à-dire à celui qui est opposé à l'angle de l'autre triangle qui est égal à cet angle, et que les deux côtés opposés aux angles égaux, ne soient pas égaux ensemble à un demi-cercle,alors les côtés restants des deux triangles sont égaux.

Soit les deux figures trilatères ABG, DEZ, l'angle en A soit égal à l'angle en D et celui en G à celui en Z et le côté BG de l'une d'elles soit égal au côté EZ de l'autre et les deux côtés AB, ED ne sont pas ensemble égaux à un demi-cercle. Alors, je dis que le côté AB est égal au côté DE et le côté AG est égal au côté DZ.

Démonstration :

En effet, nous prolongeons les deux arcs AB, AG jusqu'en H. Comme les deux arcs AB, DE ne sont pas égaux à un demi-cercle, l'arc BH n'est pas égal à l'arc DE. Nous posons alors l'arc TH égal à l'arc DE et l'arc KH égal à l'arc DZ. L'angle en H est égal à l'angle en D, car il est égal à l'angle en A. Par conséquent, la base KT est égale à la base EZ [Proposition I 4], qui est égale à BG, et l'angle TKH est égal à l'angle DZE qui est égal à l'angle en G. Donc l'angle en G est égal à l'angle en K. Par conséquent, le côté GL est égal au côté KL [Proposition I 3]. Il reste que BL est égal à TL étant donné que BG est égal à TK. C'est pourquoi l'angle BTK est égal à l'angle TBG [Proposition I 2] et l'angle HTK est égal à l'angle DEZ. Donc l'angle en B est égal à l'angle en E. L'angle en G était égal à l'angle en Z et le côté BG égal au côté EZ. Par conséquent, le côté AB est égal au côté DE et le côté AG est égal au côté DZ [Propositions I 14/15]. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 18 (égalité de triangles : 3 angles):

S'il y a deux figures trilatères, et que les trois angles de l'une d'entre elles sont égaux aux trois angles de l'autre, chacun à chacun, alors les côtés opposés aux angles égaux sont égaux.

Soient deux figures trilatères ABG, DEZ telles que l'angle en A soit égal à l'angle en D, l'angle en B soit égal à l'angle en E et l'angle en G soit égal à l'angle en Z. Alors je dis qu'aussi le côté AB est égal au côté DE, le côté BG au côté EZ et le côté AG au côté DZ.

Démonstration :

Si nous prolongeons les deux côtés AB, BG, posons BH égal à DE et BT égal à EZ, menons l'arc TH et prolongeons-le jusqu'en K, alors les deux côtés BH, BT sont égaux aux deux côtés DE, EZ – chacun à chacun – et ces côtés contiennent des angles égaux. C'est pourquoi la base TH est égale à la base DZ – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 4 – et l'angle en H est égal à l'angle en D qui est égal à celui en A, et celui en T est égal à celui en Z qui est égal à celui en G. Comme l'angle en T est égal à l'angle en G, les deux arcs TK, KG sont ensemble égaux à un demi-cercle [Proposition 10].

Et à nouveau ! Comme l'angle en H était égal à l'angle en A, les deux arcs HK, KA seront ensemble égaux à un demi-cercle [Proposition 10]. Par conséquent, les deux arcs TK, KG ensemble sont égaux aux deux arcs HK, KA ensemble. Il reste l'arc TH égal à l'arc AG, or l'arc TH est égal à l'arc DZ. Par conséquent, l'arc AG est égal à l'arc DZ.

De la même manière, il sera également clair que le côté AB est égal au côté DE et le côté BG au côté EZ. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 19 (inégalité dans un triangle : 2 angles égaux)

S'il y a deux figures trilatères, telles que deux angles d'une des deux soient égaux à deux angles de l'autre, chacun à chacun, et les deux angles restants de celles-ci ne soient pas égaux, alors le plus grand des deux côtés, qui côtoie les grands angles égaux, est le côté qui se trouve opposé au plus grand angle ; et si, des deux côtés restants, à savoir ceux opposés aux grands angles égaux, un côté d'une des deux figures et son correspondant de l'autre figure sont ensemble égaux à un demi-cercle, alors les deux côtés, opposés aux deux grands angles égaux restants, sont égaux ; si les deux angles précédemment cités sont ensemble plus petits qu'un demi-cercle, alors des deux côtés restants le côté de la figure triangulaire sur laquelle se trouve le plus petit angle est plus petit que son correspondant sur l'autre figure et si les deux côtés précédemment cités sont plus grands qu'un demi-cercle, alors deux deux côtés restants le côté de la figure triangulaire sur laquelle se trouve le plus petit angle est plus grand que son correspondant sur l'autre figure.

Soient deux figures trilatères posées aux points A, B, G, D, E, Z telles que l'angle B soit égal à l'angle D, l'angle en G égal à l'angle Z et l'angle E plus grand que l'angle A. Alors je dis que le côté DZ est plus grand que le côté BG et que si les deux côtés AG, EZ sont ensemble égaux à un demi-cercle, le côté AB est égal à l'angle ED et que si les deux côtés AG, EZ sont ensemble plus grands qu'un demi-cercle, le côté AB est plus grand que le côté DE et que si les deux côtés AG, EZ sont ensemble plus petits qu'un demi-cercle, le côté AB est plus grand que le côté DE.

Comme nous prolongeons les deux côtés BG, AG, posons l'arc GT égal à l'arc EZ et l'arc GH égal à l'arc DZ et menons entre les deux points H, T l'arc TH, alors l'arc TH est égal à l'arc DE et l'angle T à l'angle E. Ainsi l'angle T est plus grand que l'angle A.

(a) Si maintenant les deux côtés AG, EZ sont ensemble égaux à un demi-cercle, et si nous complétons l'arc AB en un demi-cercle, il a son extrémité en T. Comme les deux angles ABG, GHT sont égaux, alors les deux arcs BT, TH sont ensemble égaux à un demi-cercle. Par conséquent, l'arc AB est égal à l'arc DE.

Comme l'angle GTK est plus grand que l'angle BAG, alors, si nous assimilons l'angle HTK à l'angle BAG, l'angle H est égal à l'angle B et le côté AB est égal à l'angle TH, le côté KH égal au côté BG. Par conséquent le côté DZ est plus grand que le côté BG.

Théorème 20 (idem)

(b) Et à nouveau ! Nous posons les deux arcs AG, EZ plus petits qu'un demi-cercle et prolongeons les deux côtés AB, HT jusqu'au point K, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent. Comme l'angle ABG est égal à l'angle BHT, les deux arcs BK, KH sont ensemble égaux à un demi-cercle, et comme l'angle GTH est plus grand que l'angle BAG, les deux arcs AK, KT sont ensemble plus petits qu'un demi-cercle. Par conséquent, les deux arcs BK, KH sont ensemble plus grands que les deux arcs AK, KT pris ensemble. Ainsi l'arc TH est plus grand que l'arc AB. Puis nous découpons sur lui un arc égal à l'arc AB, à savoir l'arc HL, et menons l'arc A<M>L. D'où les deux arcs AK, KL sont ensemble égaux à un demi-cercle et c'est pourquoi l'angle ALH est égal à l'angle BAM. Mais l'angle ABM est égal à l'angle BHL, et les deux angles au point M sur les deux figures ABM, MLH sont égaux. En conséquence, le côté BM est égal au côté LH. Ainsi le côté ZD est plus grand que le côté GB.

Théorème 21 (idem)

(c) Posons maintenant l'arc AT plus grand qu'un demi-cercle et complétons l'arc AKL. Ainsi les deux arcs BL, LH sont ensemble égaux à un demi-cercle, comme l'angle B est égal à l'angle H. L'arc AK est également égal à un demi-cercle. Par conséquent, l'arc AB est égal aux deux arcs KL, LH pris ensemble. Ainsi l'arc KL est plus grand que l'arc LT. Nous posons l'arc LH en tant que base commune. Ainsi les deux arcs KL, LH, qui sont égaux à l'arc AB, sont ensemble plus grands que l'arc TH. Nous posons l'arc HTM égal à l'arc AB et menons un arc de raccord entre les deux points A, M. Ainsi cet arc passe par le point K, sensiblement comme l'arc ANKM. Comme l'angle BABG est égal à l'angle BHT, et l'angle KML est égal à l'angle MKL, c'est-à-dire BAN, car HM est égal à HL, LK et LK reste égal à LM, et AB est égal à HM, alors il est évident que l'arc BN est égal à l'arc NH et c'est pourquoi l'arc GH, qui est égal à l'arc ZD, devient plus grand que l'arc BG. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 22

S'il y a deux figures trilatères, telles qu'un côté de l'une soit égal à un côté de l'autre, un des deux angles, qui se trouve contre ce côté, d'une des deux figures soit plus grand que son correspondant dans l'autre figure, et les deux angles restants des deux figures ne soient pas tous les deux plus petits que deux angles droits, alors les côtés, opposés au plus grand angle, sur chacune des deux figures sont plus grands que leurs correspondants sur l'autre figure.

Soient deux figures trilatères posées aux points A, B, G et D, E, Z telles que l'angle A soit plus grand que l'angle D, l'angle G soit plus petit que l'angle Z et les deux angles B, E pris ensemble ne soient pas plus petits que deux droits. Alors je dis que le côté BG est plus grand que le côté EZ et le côté ED plus grand que le côté AB.

Comme nous posons l'angle GAH égal à l'angle EDZ et l'angle AGH égal à l'angle DZE et le côté GH égal au côté DZ, alors le côté AH est égal au côté DE et le côté GH au côté EZ. Comme les deux angles ABG, DEZ pris ensemble ne sont pas plus petits que deux droits, alors les deux angles ABG, AHD sont ensemble plus grands que chacun des deux angles ABG, GHB. Ainsi l'angle ABH est beaucoup plus grand que l'angle BHA et l'angle BHG que l'angle GBH. Par conséquent, le côté AH est plus grand que le côté AB et le côté BG plus grand que le côté GH. Mais le côté AH est égal au côté DE et le côté GH égal au côté EZ. Par conséquent, le côté DE est plus grand que le côté AB et le côté BG plus grand que le côté EZ. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 23 (médiane et son angle)

Si l'angle au sommet du triangle est égal à la somme des angles de la base, alors l'arc, qui est tiré du sommet du triangle au point qui partage la base en deux, est égal à la moitié de la base ; si l'angle au sommet du triangle est plus grand que la somme des deux angles restants, alors l'arc tiré est plus petit que la moitié de la base et si l'angle au sommet du triangle est plus petit que la somme des deux angles restants, alors l'arc tiré est plus grand que la moitié de la base.

(a) Soit la figure triangulaire ABG telle l'angle en B soit égal aux deux angles en A, G. Nous coupons en deux AG au point D et menons entre les deux points B, D l'arc de grand cercle BD. Alors je dis que l'arc BD est égal à l'arc DG.

Nous coupons en deux à savoir BG au point E et menons l'arc DEZ qui passe par les deux points E, D et posons l'arc DZ égal à l'arc ED et menons un arc qui passe par les deux points A, Z. Comme les deux côtés AD, DZ sont égaux aux deux côtés GD, DE – chacun à chacun – et ces côtés renferment deux angles égaux, la base AZ est égale à la base GE qui est égale à la base BE, l'angle ZAD est égal à l'angle DGB et c'est pourquoi l'angle ZAB est égal à l'angle ABG. Ainsi le côté AH est égal au côté BH. Il a déjà été démontré que AZ est égal à GE, et nous avons posé GE égal à BE. Ainsi le côté restant ZH est égal au côté restant EH. C'est pourquoi l'angle DEH est égal à l'angle DZH. L'angle DEH est par contre égal à l'angle DZA. Ainsi les deux angles DZH, DZA sont égaux. Ainsi l'angle DZH est un droit et l'angle DEH est également un droit. Ainsi les deux angles DEB, DEG sont égaux et le côté DE est commun. Comme ces côtés égaux renferment deux angles égaux, la base BD est égale à la base DG.

(b) Et de même soit l'angle ABG plus grand que les deux angles BAG, BGD pris ensemble. Alors je dis que BD est plus petit que GD.

Et il en est ainsi parce que si nous opérons comme nous avons opéré plus haut on montre facilement que AZ est égal à BE, l'angle DZA est égal à l'angle DEH et que l'angle ABG est plus grand que l'angle BAZ. Ainsi le côté AH est plus grand que BH. Ainsi l'angle DEH est plus grand que l'angle DZH. Par contre l'angle DEH est égal à l'angle DZA. C'est pourquoi l'angle DEB reste égal à l'angle DZH. Ainsi l'angle DEH est plus grand que l'angle DEB. ET comme EB est égal à EG et ED est commun, les deux côtés BE, ED sont égaux aux deux côtés GE, ED, et comme l'angle DEB est plus petit que l'angle DEG, la base BD est plus petite que la base DG.

(c) De même on montre facilement que si l'angle ABG est plus petit que les deux angles BAG, BGA pris ensemble, alors BD est plus grand que DG.

D'après ce que nous avons dit il devient évident que si l'angle ABG n'est pas plus grand qu'un droit, alors BD est plus grand que DG.

En effet, les trois angles d'une figure triangulaire sont plus grands que deux droits – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 11 – et l'angle ABG de celui-ci n'est pas plus grand qu'un droit. Ainsi les deux angles BAG, BGA sont ensemble plus grand qu'un droit. En conséquence BD est plus grand que DG. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 24 (angle obtus)

Si, dans une figure triangulaire, un angle n'est pas plus petit qu'un angle droit, et si chacun des deux côtés renfermés par celui-ci est plus petit qu'un quadrant, alors chacun des deux angles restants est plus petit qu'un angle droit.

Soit une figure triangulaire posée aux points A, B, G telle que son angle en B ne soit pas plus grand qu'un droit et que chacun des deux côtés AB, BG soit plus petit qu'un quadrant. Alors je dis que chacun des deux angles BAG, BGA est plus petit qu'un angle droit.

Nous posons en effet chacun des deux arcs BD, BE égaux à un quadrant, posons le point B comme pôle et dessinons avec la mesure des deux points D, E l'arc DE. Comme l'angle ABG n'est pas plus petit qu'un angle droit, alors il est soit un droit soit il est plus grand qu'un droit.

(a) Considérons tout d'abord le cas dans lequel il est droit. Alors l'arc DE est un quadrant, le point D un pôle de l'arc BGE et le point E un pôle de l'arc BAD. Si nous menons les deux arcs DG, AE, alors chacun des deux angles BAE, BGD est égal à un droit. Par conséquent chacun des deux angles BAG, BGA est plus petit qu'un droit.

(b) Et à nouveau ! Nous posons l'angle ABG plus grand qu'un droit. Alors l'arc DE est plus grand qu'un quadrant. Nous découpons sur celui-ci les deux arcs DZ, EH et posons chacun d'entre eux égal à un quadrant. D'où le point Z est un pôle de l'arc BAD et le point H est un pôle de l'arc BGE. Si nous menons les deux arcs AZ, GH, chacun des deux angles BAZ, BGH devient égal à un droit. Par conséquent, chacun des deux angles BAG, BGA est plus petit qu'un angle droit. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 25 (angle obtus)

Si, dans une figure triangulaire, un angle n'est pas plus petit qu'un angle droit, et si chacun des deux côtés qui renferment un des deux angles restants, est plus petit qu'un quadrant, alors le côté restant de cette figure est plus petit qu'un quadrant et chacun des deux angles restants est aigüe.

Soit une figure triangulaire posée aux points A, B, G telle que l'angle en A ne soit pas plus petit qu'un angle droit et chacun des deux côtés AB, BG soit plus petit qu'un quadrant. Alors je dis que l'arc AG est plus petit qu'un quadrant et chacun des deux angles B, G est aigu.

Comme nous posons chacun des deux arcs BD, BE égal à un quadrant, posons le point B comme pôle et dessinons avec la mesure BD l'arc DE, dressons un arc AZ à partir du point A jusqu'en l'arc BD verticalement, et menons DEZ, AGH, alors le point Z est un pôle du cercle BAD. Nous menons l'arc ZB. Alors l'angle DBZ est droit. Ainsi l'angle ABG est aigu et l'angle BGA également aigu ; en effet l'arc DEZ est un quadrant et l'arc EH est plus petit qu'un quadrant, ainsi le plus petit des arcs qui sont tirés à partir du point H jusqu'en l'arc BGE est l'arc EH, c'est pourquoi l'arc GH est plus grand que l'arc EH, ainsi l'angle GEH est plus grand que l'angle HGE, qui est égal à l'angle BGA ; l'angle GEH est par contre un droit, ainsi l'angle BGA est aigu.

Et à nouveau ! Comme l'arc BD est un quadrant, l'arc DE devient plus petit qu'un quadrant et le plus petit des arcs qui sont tirés à partir du point A jusqu'en l'arc DEZ est l'arc DA et celui qui est proche de cet arc est plus petit que ce qu'il y a après. Ainsi l'arc AH est plus petit que l'arc AZ, l'arc AZ est par contre un quadrant, ainsi l'arc AH est plus petit qu'un quadrant. Par conséquent l'arc AG est plus petit qu'un quadrant.

Si l'angle GAB est un droit, le point H est un pôle de l'arc BAD et tout ce que nous avons dit est évident. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 26 (Thalès)

Si sur une figure triangulaire une paire quelconque de côtés est partagée en deux, alors l'arc, qui est dessiné entre les deux milieux, est plus grand que la moitié de la base.

Soit une figure triangulaire posée aux points A, B, G. Les deux côtés AB, BG peuvent être coupés en deux aux points D, E et nous dessinons un arc de raccord entre les deux points D, E, à savoir l'arc DE. Alors je dis que l'arc DE est plus grand que la moitié de la base AG.

Nous prolongeons à savoir DE jusqu'en Z, posons DZ égal à DE et menons entre les deux points A, Z l'arc de raccord AZ. Nous prolongeons chacun des deux arcs AZ, GB et ils peuvent se rencontrer au point H. Ensuite les deux côtés BD, DE sont égaux aux deux côtés AD, DZ – chacun à chacun – et ces côtés renferment des grands angles égaux. Ainsi la base BE est égale à la base AZ et elle également égale à l'arc EG. Par conséquent l'arc EG est égal à l'arc AZ. L'angle ABE est égal à l'angle BAZ. Ainsi les deux arcs AH, HB sont ensemble égaux à un demi-cercle – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 10. – Par conséquent les deux arcs AH, HE sont ensemble plus grand qu'un demi cercle. Nous menons l'arc AE. Alors l'angle AEG est plus petit que l'angle EAZ – d'après ce qui découle de la réciproque du théorème 10. – Les deux côtés ZA, AE sont égaux aux deux côtés GE, EA – chacun à chacun- et l'angle ZAE est plus grand que l'angle AEG. C'est pourquoi la base ZE est plus grande que la base AG. Ainsi l'arc DE est plus grande que la moitié de AG. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 27 (segment milieu – angles de base)

Si, dans une figure triangulaire, un angle n'est pas plus petit qu'un angle droit, alors l'arc, qui est dessiné entre les deux milieux des deux côtés qui renferment cet angle engendre deux angles qui sont plus petits que les deux angles restants du triangle – chaque angle plus petit que son correspondant, la position est similaire à la position.

Soit une figure triangulaire posée aux points A, B, G, telle que l'angle au point B ne soit pas plus grand qu'un angle droit, chacun des deux côtés AB, BG soit coupé en deux aux points D, E et entre ces deux points soit tiré un arc de raccord DE. Alors je dis que l'angle BDE est plus petit que l'angle BAG et que l'angle BED est plus petit que l'angle BGA.

Comme l'angle ABG n'est pas plus petit qu'un angle droit et chacun des deux arcs BD, BE est plus petit qu'un quadrant, alors chacun des deux angles BDE, BED est plus petit qu'un angle droit. Si maintenant chacun des deux angles BAG, BGA n'est pas plus petit qu'un droit, alors il est évident que l'angle D est plus petit que l'angle A et que l'angle E est plus petit que l'angle G. Et si un des deux angles BAG, BGA est plus petit qu'un droit, alors considérons que c'est l'angle BAG. Alors je dis que l'angle BDE est plus petit que l'angle BAG.

En effet nous coupons en deux AG au point Z et menons les deux arcs DG, DZ. Comme BE est égal à EG, le côté ED est commun et l'angle BED est plus petit que l'angle DEG – car l'angle BED est aigu –, alors la base BD qui est égale à DA est plus petite que la base DG – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 8 –. Il en résulte que l'angle AZD est plus petit que l'angle DZG, comme AZ, ZG sont égaux, ZD est commun et la base DG est plus grande que la base AD qui est égale à EG. Ainsi l'angle AZD est aigu. L'angle ZAD est aussi aigu. Ainsi l'arc, qui est tiré à partir du point D verticalement sur AZ, coupe l'arc AZ et appelons cette verticale DH. Comme l'angle DHA est un droit, AD est plus grand que DH, l'arc AD par contre est plus petit qu'un quadrant ; ainsi le plus court des arcs, qui sont tirés à partir du point D jusqu'en l'arc AHG, est l'arc DH et ce qui est adjacent aux arcs menés restants est plus petit que qui les oppose**.** Comme AD est égal à BD, et BE égal à EG, alors l'arc DE est plus grand que la moitié de l'arc AG – d'après ce qui a été démontré dans le théorème précédent –. Alors nous posons l'arc AT égal à l'arc DE et menons l'arc DT. Alors l'arc DT est plus grand que l'arc DZ, l'arc DZ par contre est plus grand que l'arc BE, comme les deux côtés AG, AB sont coupés en deux aux points Z, D et l'arc ZD a été tiré qui est plus grand que la moitié de la base BG – comme il a été démontré dans le théorème précédent – et BE est la moitié de la base GB. Ainsi l'arc DT est beaucoup plus grand que l'arc BE. D'où les deux côtés AD, AT sont égaux aux deux côtés BD, DE et la base DT est plus grande que la base BE. Ainsi l'angle DAT est plus grand que l'angle BDE.

Il est également évident que l'angle BGA est plus grand que l'angle BED. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 28 (théorème des milieux)

Si, dans une figure triangulaire, il y a un angle qui n'est pas plus petit qu'un angle droit et entre le milieu du côté qui est opposé à cet angle et le milieu d'un des deux côtés qui renferment le dit-angle un arc est tiré, alors il génère un angle qui est plus petit que l'angle qui n'est pas plus petit qu'un droit et c'est un angle dont la position est proche de sa position, c'est-à-dire cet angle-là

Soit la figure triangulaire ABG telle que son angle au point A ne soit pas plus petit qu'un droit, nous pouvons partager en deux ses côtés aux points D, E, Z, et nous traçons deux arcs entre le point E et chacun des deux points D, Z. Alors je dis que chacun des deux angles BDE, EZG est plus petit que l'angle BAG.

En effet nous menons l'arc DZ et l'arc AE. Alors l'angle BAG est soit un droit, soit plus grand qu'un droit.

(a) Si c'est un droit, alors AE est plus grand que EB du fait que la somme des deux angles AGB, ABG est ici plus grande que l'angle A, le droit. L'arc AD est égal à l'arc DB et l'arc DE est commun, par conséquent l'angle BDE est plus petit que l'angle BAG.

(b) [1] Si l'angle BAG est obtus et n'est pas en comparaison avec l'angle BDE plus grand qu'un angle droit, alors l'angle BDE est plus petit que l'angle BAG.

[2] Supposons maintenant que les deux angles BAG, BDE soient obtus et que les deux arcs BD, BE soient plus petits qu'un quadrant. Comme les deux côtés DB, DA sont égaux, le côté DE est commun et l'angle BDE est plus grand que l'angle ADE, alors l'arc BE, qui est égal à l'arc EG, est plus grand que l'arc AE. Par contre AZ est égal à ZG et EZ est commun, ainsi l'angle EZG est obtus. Chacun des deux arcs AG, GZ est plus petit qu'un quadrant, par conséquent l'angle AGB est aigu. Puis nous menons à partir des deux points A, G deux arcs, qui arrivent perpendiculairement sur AG, à savoir AH, GH. Alors le point H est un pôle de l'arc AG. Nous menons entre les deux points D, H l'arc de raccord DH et le prolongeons, ainsi que l'arc AG, dans les deux directions. Ils peuvent se rencontrer aux deux points T, K. Ainsi l'arc DT est plus petit que l'arc DHK – d'après ce qui a été montré dans le théorème 8 –. Ainsi l'arc DT est le plus petit des arcs qui vont du point D jusqu'en l'arc TAGK, et ce qui des arcs restants adjacents est plus petit que ceux qui lui sont opposés**.** Comme AD est plus petit qu'un quadrant et l'arc AH est un quadrant, alors AD est plus petit que AH et pour les mêmes raisons AH est plus petit que AK. ED est plus grand que AZ, donc il est égal à AL. Nous menons les deux arcs DL, LE. Comme l'arc DL est plus grand que DZ, alors il est bien plus grand que BE. Donc les deux côtés BD, DE sont égaux aux deux côtés DA, AL et la base BE est plus petite que la base DL. Par conséquent l'angle BDE est plus petit que l'angle BAG. De même on montre que l'angle GZE est plus petit que l'angle BAG. Et c'est ce qu'il fallait démontrer !

Théorème 29 (bissectrice)

Si deux côtés d'une figure triangulaire sont ensemble un demi-cercle, alors l'arc, qui partage en deux l'angle que renferment les deux côtés, partage la base également en deux et est un quadrant, et si on tire un arc entre le milieu de la base et le sommet du triangle, alors il partage en deux cet angle et est un quadrant.

On donne une figure triangulaire qui se trouve aux points A, B, G telle que les deux côtés AB, BG soient ensemble égaux à un demi-cercle et nous menons l'arc BD. Alors je dis que : si l'angle ABD est égal à l'angle DBG, alors AD est égal à DG et l'arc BD est un quadrant.

Puis nous complétons le tracé de la figure. Comme les deux côtés AB, BG sont ensemble égaux à un demi-cercle, l'angle AGE et égal à l'angle DAB et AB est égal à GE et BG égal à AE. Comme l'angle ABD est égal à l'angle DBG, qui est égal à l'angle GED, l'angle DAB est égal à l'angle DGE et le côté AB est égal au côté GE, alors AD est égal à DG et BD à DE. Ainsi l'arc BD coupe la base AG et BD est un quadrant.

Et à nouveau ! Si AD est égal à DG, alors l'arc BD coupe l'angle ABD en deux et BD est un quadrant.

Puis les deux côtés AD, DG sont égaux, et aussi les deux côtés AB, GE, et l'angle BAD est égal à l'angle DGE. Par conséquent, l'angle ABD est égal à l'angle DEG, qui est égal à l'angle DBG. Ainsi l'arc BD coupe l'angle ABG en deux, BD est égal à DE et BD est un quadrant, car BDE est un demi-cercle. Et c'est ce que nous voulions démontrer !

Théorème 30

Si dans une figure triangulaire deux côtés sont égaux ensemble à un demi-cercle, et deux arcs sont tirés du point du sommet jusqu'à la base tels qu'ils génèrent avec les deux côtés deux angles égaux, alors ils coupent la base en deux segments égaux, et s'ils coupent la base en deux segments égaux, alors ils génèrent avec les deux côtés deux angles égaux, et également les deux arcs tirés sont ensemble égaux à un demi-cercle.

Ce théorème se démontre de la même manière que le précédent.

Théorème 31

S'il y a une figure triangulaire mais pas isocèle telle que les deux côtés soient ensemble égaux à un demi-cercle, que deux arcs soient tirés du point de son sommet jusqu'à la base, et qu' ils soient ensemble égaux à un demi cercle, alors les deux arcs tirés coupent la base en deux segments égaux et les deux angles et les deux côtés sont égaux.

On donne une figure triangulaire qui se trouve aux points A, B, G telle que les deux côtés AB, BG soient inégaux, et soient ensemble égaux à un demi-cercle et que les deux arcs BD, DZ soient tirés tels que leur somme soit également égale à un demi-cercle. Alors je dis que les arcs AD, ZG sont égaux et que les angles ZBG, DBA sont égaux.

Puis nous complétons le tracé de la figure.

Alors l'angle BAD est égal à l'angle ZGE et l'angle BDA est égal à l'angle GZE. Et comme le côté BG n'est pas égal au côté AB, alors le point B n'est pas le pôle de ADG. Ainsi les deux figures ABD, GEZ sont trilatères, les deux côtés AB, BD de l'une sont égaux aux deux côtés GE, EZ de l'autre – chacun à chacun – et les angles opposés aux deux côtés égaux sur les deux figures trilatères sont des angles égaux et les deux points B, E ne sont des pôles des deux arcs AD, GZ, lesquels sont les deux bases. Ainsi l'arc AD est égal à l'arc GZ et l'angle ABD est égal à l'angle GEZ, qui est égal à l'angle GBZ. Et c'est ce que nous voulions démontrer !

Théorème 32

Si dans une figure triangulaire deux côtés sont ensemble plus petits qu'un demi-cercle et un arc est tiré du point du sommet de la figure jusqu'à la base tel qu'il partage en deux l'angle ou la base, alors il est plus petit qu'un quadrant.

On donne une figure triangulaire qui se trouve aux points A, B, G et telle que les deux côtés AB, BG soient plus petits qu'un demi-cercle. Nous menons l'arc BD, et cet arc partage en deux ou bien l'angle ABG tel que l'angle ABD soir égal à l'angle DBG, ou bien la base AG tel que AD soit égal à DG. Alors je dis que l'arc BD est plus petit qu'un quadrant.

Comme les deux arcs AB, BG sont ensemble plus petits qu'un demi-cercle, alors, si nous les prolongeons jusqu'à ce qu'ils se rencontrent au point E, l'arc GE est plus grand que l'arc AB et l'angle AGE est plus est plus grand que l'angle GAB.

(a) Si maintenant l'arc AD est égal à l'arc DG, alors il est évident que, si nous posons l'angle AGH est égal à l'angle BAG, l'arc BD est égal à l'arc DH. L'arc DH est par contre plus petit qu'un demi-cercle. Ainsi l'arc BD est plus petit qu'un quadrant.

(b) Et si l'angle ABD est égal à l'angle DBG, alors il est clair que, si nous posons l'arc ET égal à l'arc AB et menons l'arc AKT, l'arc BK est un quadrant. Par conséquent, l'arc BD est plus petit qu'un quadrant. Et c'est ce que nous voulions montrer !

Théorème 33

S'il y a une figure triangulaire non-isocèle et que ses deux côtés différents soient ensemble plus petits qu'un demi-cercle, alors l'arc, qui partage en deux parties égales l'angle que ces deux côtés renferment, partage la base en deux parties inégales, dont la plus grande se trouve à côté du plus grand côté, et l'arc, qui est tiré à partir du milieu de la base, partage l'angle en deux parties inégales où la plus grande partie des deux parties de l'angle est situé à côté du plus petit côté.

On donne une figure triangulaire qui se trouve aux points A, B, G telle que BG soit plus grand que AB, eux deux ensemble soient plus petits qu'un demi-cercle, et nous menons l'arc BD. Alors je dis que DG est plus grand que AD si l'angle ABD est égal à l'angle DBG, et que l'angle ABG est plus grand que l'angle DBG si AD est égal à DG.

En effet, nous découpons sur BG un arc qui est égal à AB, à savoir BZ et menons les deux arcs AZ, DZ. Ainsi AB est égal à BZ et AB est commun.

(a) Si les deux angles ABD, DBG sont égaux, alors la base AD est égale à la base DZ et l'angle BAD est égal à l'angle BZD. En ce qui concerne les deux angles BAD, BGD, ils sont tous les deux plus petits que deux angles droits, car les deux côtés AB, BG sont plus petits qu'un demi-cercle. En ce qui concerne les deux angles BZD, DZG, ils sont tous les deux égaux à deux droits. Il reste ainsi que l'angle DGZ est plus petit que l'angle DZG, et le côté DZ est plus petit que le côté DG. Il a déjà été démontré que le côté DZ est égal à AD. Par conséquent GD est plus grand que AD.

(b) Et à nouveau ! Nous posons AD égal à DG. Alors je dis que l'angle ABD est plus grand que l'angle DBG.

En effet, nous procédons comme nous l'avons fait précédemment. Alors les deux angles BAG, BGA sont ensemble plus petits que deux droits et les deux angles AZB, AZG sont ensemble égaux à deux droits. Par contre, l'angle ZAB est égal à l'angle AZB, car AB est égal à BZ. Il reste ainsi que l'angle AZG est plus grand que les angles ZAG, ZGA. Nous savons donc que l'arc ZD, qui coupe la base en deux, est plus petit que AB – d'après ce qui a été démontré dans la proposition 23 –. Par contre, les deux côtés ZB, BD sont égaux aux deux côtés DB, BA – chacun à chacun –. Par conséquent, l'angle ABD est plus grand que l'angle DBG. Et c'est ce que nous voulions démontrer !

Théorème 34

Si l'on a les mêmes conditions, alors je dis également que les deux côtés AB, BG sont ensemble plus grands que deux fois l'arc BD.

Comme nous prolongeons les deux arcs BD, BG jusqu'en E, alors l'arc ED est plus grand que l'arc BD – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 32 –. Ainsi nous posons l'arc DH égal à l'arc BD. (a) Si maintenant l'arc AD est égal à l'arc DG, alors l'arc AB est également égal à l'arc GH. Et comme les deux arcs BG et GH, qui est égal à l'arc AB, sont plus grands que l'arc BH, qui est le double de l'arc BD, et l'arc GH – d'après ce qui a été démontré – est égal à l'arc AB, alors les arcs BG, AB sont ensemble plus grands que le double de l'arc BD.

Et à nouveau ! Nous posons l'angle ABD égal à l'angle DBG. Ainsi DG est plus grand que DA. Nous découpons sur DG un arc égal à DA, à savoir DZ, et menons l'arc HZT. Ainsi GT est plus grand que TZ. Par contre AB est égal à ZH. Ainsi les deux arcs GB, BA sont plus grands que les deux arcs BT, TH et les deux arcs BT, TH sont plus grands que l'arc BH, qui est le double de BD. Ainsi les deux arcs AB, BG sont plus grands que l'arc BH, qui est le double de BD. Et c'est ce que nous voulions démontrer !

Théorème 35

Si les deux côtés d'une figure triangulaire sont inégaux et eux deux ensemble sont plus petits qu'un demi-cercle et que du point du somment de la figure jusqu'à sa base est tiré un arc qui est égal à la moitié des deux côtés qui ne sont pas égaux, et dont la sommet est plus petite qu'un demi-cercle, alors il partage la base et l'angle en deux segments inégaux et c'est la plus grande partie d'entre elles deux qui se trouve à côté du plus petit côté.

On donne une figure triangulaire qui se trouve aux points A, B, G telle que BG soit plus grand que AB, ces deux derniers soient ensemble plus petits qu'un demi-cercle. Nous menons l'arc BD et nous le posons égal à la moitié des deux arcs AB, BG réunis. Alors je dis que AD est plus grand que DG et que l'angle ABD et plus grand que l'angle DBG.

En effet nous posons DE égal à BD et menons l'arc AE. Comme les deux arcs BA, AE sont ensemble plus grands que l'arc BE et l'arc BE est égal aux deux arcs AB, AE pris ensemble, alors les deux arcs AB, AE sont ensemble plus grands que les deux arcs AB, BG pris ensemble et c'est pourquoi l'arc AE est plus grand que l'arc BG. De même les deux arcs GB, BA sont ensemble égaux au double de BD, lequel est AD, BD, et l'arc GB est plus grand que l'arc BA. Ainsi l'arc GB est plus grand que l'arc BD, qui est égal à DE. Ainsi l'arc GB est plus grand que l'arc DE. Comme l'arc AE est plus grand que l'arc BG et l'arc DE est plus petit que l'arc BG, alors, si nous menons à partir du point E jusqu'en AD un arc égal à BG, celui-ci tombe, comme EZ tombe, entre D, A et nous prolongeons EZ jusqu'en H. Il s'ensuit que BH, HE sont ensemble plus grands que BE et l'arc BE est égal au deux angles AB, BG pris ensemble et l'arc EZ est égal à l'arc BG. C'est pourquoi l'arc ZH est plus grand que l'arc AH et c'est pourquoi l'angle BAZ est plus grand que l'angle AZH, qui est égal à l'angle DZE. Comme les deux angles BAG, BGA sont ensemble plus petits que deux droits, alors les deux angles BGD, DZE sont ensemble bien plus petits que deux angles droits. Ainsi, dans les deux figures trilatères BDG, EDZ, deux de leurs angles, à savoir les deux angles BDG, EDZ, et les côtés, qui renferment deux autres de leurs angles, sont égaux – chacun à chacun : le côté BD au côté DE et le côté BG au côté EZ et les deux angles restants pris ensemble ne sont pas égaux à deux droits. En conséquence, la base GD est égale à la base DZ – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 13 – et également l'angle DEZ est égal à l'angle DBG. C'est pourquoi AD est plus grand que DG. Comme EZ est égal à BG et BG est plus grand que BA, alors EH est beaucoup plus grand que BH et c'est pourquoi l'angle ABD est plus grand que l'angle DEZ. Nous avons déjà démontré que l'angle DEZ est égal à l'angle DBG. Ainsi l'angle ABD est plus grand que l'angle DBG. Et c'est ce que nous voulions démontrer !

Théorème 36

Si deux côtés d'une figure triangulaire sont inégaux, ils ne sont ensemble pas plus grands qu'un demi-cercle, du point du sommet de cette figure à la moitié de sa base est tiré un arc de grand cercle, sur cet arc un point est désigné, de quelque façon qu'il tombe, et de celui-ci deux arcs sont tirés jusqu'aux extrémités de la base, alors les deux arcs tirés renferment avec les deux côtés inégaux deux angles inégaux dont le plus grand se trouve à côté du plus petit côté.

On donne une figure triangulaire se trouvant aux points A, B, G, telle que le côté BG soit plus grand que le côté AB et que les deux côtés AB, BG ne soient ensemble pas plus grands qu'un demi-cercle. Nous coupons AG en deux au point D, nous menons un arc du point B au point D, nous désignons sur cet arc un point E – de quelque façon qu'il tombe – et nous menons du point E aux deux points A, G deux arcs, à savoir les deux arcs EA, EG. Alors je dis que l'angle BAE est plus grand que l'angle BGE.

En effet, les deux côtés AB, BG sont ensemble soit plus petit qu'un demi-cercle, soit égaux à un demi-cercle.

S'ils sont plus petits qu'un demi-cercle, alors l'angle ABD est plus grand que l'angle GBD, et l'angle GBD est aigu. Si nous menons à partir du point E une verticale à BG, elle tombe entre les deux points B, G. Alors, dans ce cas, soit la verticale EZ. Nous menons à partir du point E jusqu'en l'arc AB la verticale EH. Comme chacun des deux angles BHE, BZE est un droit, l'angle EBH est plus grand que l'angle EBZ et EB est commun, alors EH est plus grand que EZ. Alors nous posons TH égal à EZ et menons l'arc AT. Comme AB est plus petit qu'un quadrant, alors, dans la première figure, AH est bien plus petit qu'un quadrant et l'arc AE est plus grand que AT. L'arc EG est par contre plus grand que l'arc AE, car BG est plus grand que BA, GD est égal à DA et BD est commun. Ainsi l'angle EDG est plus grand que l'angle EDA et c'est pourquoi, également, la base EG est plus grande que la base EA. Ainsi l'arc EG est bien plus grand que l'arc AT, qui est plus grand que l'arc TH., lequel est égal à l'arc EZ. Ainsi l'arc EZ est plus petit que l'arc AT. Eg est plus grand que AT. Nous posons, par conséquent, que l'arc qui est tiré à partir du point E jusqu'en BG est égal à l'arc AT, l'arc EK. Par contre l'arc TH est égal à l'arc EZ et les angles aux points H, Z sont droits. Ainsi l'angle HAT est égal à l'angle EKZ, par contre l'angle EKZ est plus grand que l'angle EGB, car la somme de EG et EK est plus petite qu'un demi-cercle. Ainsi l'angle HAT est plus grand que l'angle EGB. Alors l'angle BAE est bien plus grand que l'angle EGB.

(b) Et à nouveau ! Nous posons que la verticale est tirée à partir du point E jusqu'en AB, tombe en dehors de AB, comme l'arc EH de la deuxième et troisième figure tombe. Nous complétons les deux arcs HBAL, HEL. Comme l'arc AE est plus petit qu'un quadrant, le point A n'est pas un pôle du cercle LEH. Ainsi un des deux arcs AH, AL est plus grand qu'un quadrant.

[1] Tout d'abord soit l'arc, qui est plus qu'un quadrant, l'arc AL – comme c'est le cas dans la deuxième figure –. Ainsi il reste le reste de ce que nous avons évoqué dans cette condition ; car AH est plus petit qu'un quadrant et implique que l'angle BAE est plus grand que l'angle EGB.

[2] Et à nouveau ! Nous posons l'arc AB comme l'arc des deux arcs AH, AL qui est plus grand qu'un quadrant – comme sur la troisième figure. Ainsi l'arc AL est plus petit qu'un quadrant. Nous posons M comme pôle du cercle LEH et menons l'arc de grand cercle ME. Comme les deux arcs de grand cercle, à savoir les deux arcs EL, MAL, se coupent à angle droit et le point M est un pôle du cercle EL, alors l'arc AL est plus petit qu'un quadrant et l'arc AE est également plus petit qu'un quadrant, alors l'arc EL est plus petit qu'un quadrant. L'arc restant EH est ainsi plus grand qu'un quadrant, donc plus grand que l'arc AE. C'est pourquoi l'angle HAE est plus grand que l'angle AHE, le droit, et est ainsi obtus. Et l'angle BGE est aigu, car il est plus que l'angle BGA et l'angle BGA est aigu. En effet, les deux angles BGA, BAG sont plus petits que deux droit, car les deux arcs AB, BG sont ensemble plus petits qu'un demi-cercle, et l'angle BAG est plus grand que l'angle BGA.

Et si la somme de AB, BG est un demi-cercle, alors les deux verticales EZ, EH sont égales entre elles et tombent à l'intérieur du triangle, comme sur la figure 1, car BD coupe l'angle de la pointe de la figure en deux. Et nous montrons, comme nous l'avons déjà montré, que l'angle BAE est plus grand que l'angle BGE. Et c'est ce que nous voulions démontrer !

Théorème 37 (découpe du coté de base < – >angle au sommet)

Si deux côtés d'une figure triangulaire ne sont pas égaux , leur somme est plus petite qu'un demi-cercle, et la base est séparée par deux arcs égaux se terminant par ses extrémités, alors les deux arcs, qui sont tirés des deux points avec lesquels le côté de base est partagé au point du sommet de la figure, avec les deux côtés inégaux renferment deux angles inégaux, dont le plus grand se trouve à côté du plus petit côté, et les deux arcs tirés sont ensemble plus petit que ces deux côtés ensemble.

On donne une figure triangulaire, se trouvant aux points A, B, G, telle que son côté BG soit plus grand que le côté AB, et les deux côtés AB, BG soient ensemble plus petits qu'un demi-cercle. Sur ma base AG seront découpés deux arcs égaux, à savoir AD, EG, et seront tirés les deux arcs BD, BE. Alors je dis que l'angle ABD est plus grand que l'angle GBE et que les deux arcs BD, BE sont ensemble plus petits que les deux arcs AB, BG ensemble.

Comme nous coupons DE au point Z, menons l'arc BZ, prolongeons-le, posons ZH égal à BZ et menons les deux arcs AH, HD, alors AH est égal à BZ et DH est égal à BE et l'angle ABD est plus grand que l'angle AHD. En effet, sur le triangle BAH, la base est coupée en deux au point Z, à partir de celui-ci est tiré un arc jusqu'en A, à savoir AZ, sur celui-ci se trouve le point D et à partir de celui-ci sont tirés les deux arcs DH, DZ et le côté AB est plus petit que le côté AH. Par conséquent, l'angle ABD, comme nous l'avons dit, est plus grand que l'angle AHD –d'après ce qu'il a été démontré sur la figure précédente. Par contre, l'angle AHD est égal à l'angle GBE. Ainsi l'angle ABD est plus grand que l'angle GBE. Et comme les deux arcs BA, AH sont ensemble plus grand que les deux arcs BD, DH pris ensemble, qui, eux sont égaux aux deux arcs DB, BE, alors les deux arcs DB, BE sont ensemble plus grands que les deux arcs DB, BE pris ensemble. Et c'est ce que nous voulions démontrer !

Théorème 38 (inclusion de triangle)

Si deux côtés d'une figure triangulaire ne sont pas égaux, et sont plus petits qu'un demi-cercle ensemble, du point du sommet de la figure deux arcs sont tirés jusqu'en la base, lesquels renferment avec les deux côtés inégaux deux grands angles égaux, alors ils coupent la base en deux segments inégaux dont le plus petit se trouve du côté du plus petit côté, et les deux arcs tirés sont ensemble plus petits que les deux côtés de cette figure qui ne sont pas égaux.

Soit une figure triangulaire posée aux points A, B, G telle que BG soit plus grand que AB et AB, BG soient ensemble plus petits qu'un demi-cercle. A partir du point B peuvent être tirés deux arcs BD, BE et on pose l'angle ABD, égal à l'angle EBG. Alors je dis que AD est plus petit que EG et que les deux arcs BD, BE sont ensemble plus petits que les deux arcs AB, BG.

Comme l'angle ABD est égal à l'angle EBG, alors il s'ensuit que GD est plus grand que AD, car, si GD est égal à AD, ABD est plus grand que l'angle GBD. Alors nous coupons AG en deux au point Z, menons l'arc BZ, le prolongeons jusqu'en H, posons ZH égal à BZ et menons les deux arcs AH, DH. Ainsi l'angle ABD est plus grand que l'angle AHD – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 36 –. Par contre l'angle ABD est égal à l'angle GBE. Ainsi l'angle GBE est plus grand que l'angle AHD. Ainsi nous posons l'angle AHT égal à l'angle GBE. L'angle GBE est égal à l'angle TAH et le côté BG est égal au côté AH, car les deux côtés AZ, ZH sont égaux aux deux côtés BZ, ZG et ces côtés égaux renferment des angles égaux. Ainsi AT est égal à GE et TH à BE. Alors AD est plus petit que EG. L'angle TZH est obtus car la base BG dans le triangle BZG est plus grande que la base AB dans le triangle AZB et l'arc HZ est plus petit qu'un quadrant – d'après ce qui a été démontré dans le théorème 32. Ainsi l'arc DH, qui se trouve loin de DH, est plus grand que l'arc TH, qui se trouve plus près. Ainsi les deux arcs BD, DH sont ensemble plus grands que les deux arcs BE, BD pris ensemble. Par contre, les deux arcs AB, AH sont ensemble plus grands que les arcs BD, DH pris ensemble. C'est pourquoi les deux arcs AB, AH sont ensemble plus grands que les deux arcs BE, BD. Par contre l'arc AH est égal à l'arc BG. Par conséquent, les deux arcs AB, BG sont ensemble plus grands que les deux arcs BD, BE pris ensemble. Et c'est ce que nous voulons démontrer !

Théorème 39 (deux triangles isocèles dans un triangle)

Si deux côtés d'une figure triangulaire ne sont pas égaux, et sont plus petits qu'un demi-cercle ensemble, du point du sommet de la figure deux arcs sont tirés jusqu'à la base et sont ensemble égaux aux deux côtés inégaux, alors avec les deux côtés inégaux ils renferment deux angles inégaux et coupent la base en deux segments inégaux, dont le plus grand se trouve du côté du plus petit côté.

On donne une figure triangulaire se trouvant aux points A, B, G telle que AB, BG soient ensemble plus petits qu'un demi-cercle. Les deux arcs BD, BE peuvent être tirés de telle manière que BD, BE soient ensemble égaux aux deux côtés AB, BG pris ensemble. Alors je dis que AD est plus grand que GE et que l'angle ABD est plus grand que l'angle GDE.

La démonstration consiste à couper DE en deux au point Z, tirer BZ, le prolonger jusqu'en H, poser ZH égal à BZ, tirer les deux arcs AH, HD. Alors DH est égal à BE. C'est pourquoi les deux arcs HD, DB sont ensemble égaux aux deux arcs AB, BG pris ensemble. Par contre, les deux arcs AB, AH sont ensemble plus grands que les deux arcs AB, BG pris ensemble. C'est pourquoi l'arc AH est plus grand que l'arc BG. Par contre DH est plus petit que BG. Donc nous menons l'arc TH et le posons égal à l'arc BG. Il est clair qu'il tombe entre les deux points A, D, car l'angle ADH est obtus, DH est plus petit que BG et AH est plus grand que BG. C'est pourquoi ZT est égal à ZG et ZD égal à ZE. Ainsi l'arc DT est égal à l'arc GE, c'est pourquoi l'arc DA est plus grand que l'arc EG. DH est égal à BE. Par conséquent, l'angle THD est égal à l'angle GBE, car les côtés des deux triangles sont égaux. L'angle ABD est plus grand que l'angle AHD, par conséquent l'angle ABD est bien plus grand que l'angle EBG, qui est égal à l'angle DHT. Et c'est ce que nous voulons démontrer.

Deuxième livre :

Théorème 1 : (triangles semblables inclus l'un dans l'autre)

Soit une figure triangulaire posée sur les points A, B, G, telle que les deux angles BAG, BGA soient ensemble plus petits que deux droits et que sur un des côtés AB, BG de la figure ABG ou à l'intérieur soit marqué un point D quelconque.

Alors je dis que l'on peut tirer un arc du point D jusqu'en l'arc AG comme est tiré l'arc DE tel que l'angle DEG soit égal à l'angle BAG.

Théorème 2 : (idem)

Soit maintenant le point défini, à savoir D, à l'intérieur de la figure triangulaire. Nous menons les deux arcs AD, DG et les prolongeons jusqu'aux deux points E, Z.

Comme maintenant les deux angles BAG, BGA sont ensemble plus petits que deux droits, les deux angles ZGA, ZAG sont ensemble beaucoup plus petits que deux angles droits. Alors nous pouvons tirer un arc à partir du point D comme est tiré l'arc DH, tel que l'angle DHG soit égal à l'angle BAG.

Théorème 3 : (un segment parallèle à un côté ressort de l'autre côté)

Si la chose est comme nous l'avons décrite, alors je dis que : Si l'arc AB n'est pas plus grand qu'un quadrant et tout point est tiré ou bien sur BG ou bien à l'intérieur de la figure – et soit l'arc est tiré de ce point jusqu'en AG et avec le quel il renferme un angle qui est égal à l'angle BAG et la même situation comme il l'a, DZ – alors je dis qu'il coupe l'arc BG.

Théorème 4 : (parallèles et angles alternes-internes)

Soit ABG la figure triangulaire dont la somme des deux côtés AB et BG est plus petite qu'un demi cercle, et à l'intérieur de la figure est tracé un point, comme toujours il peut aussi tomber, à savoir le point D. Par lui peuvent passer les arcs EDH, ZDT de telle sorte que l'angle BAG soit égal à l'angle TZG et l'angle BGA soit égal à l'angle AEH.

Alors je dis que dans la figure BHDT le côté DT est plus grand que le côté BH et le côté DH plus grand que le côté BT.

Théorème 5 :

On donne une figure triangulaire isocèle construite aux points A, B, G, telle que AB soit égal à BG, l'angle ABG ne soit pas plus grand qu'un angle droit et chacun des angles BAG et BGA soient aigus. Un des deux côtés AB, BG – et à savoir BG – peut être séparé en deux grands arcs égaux, appelés BD, EZ et il peut être tiré des arcs des points D, E, Z jusqu'en la base AG, qui renferment avec lui des angles qui sont égaux avec l'angle BAG, qui sont appelés les arcs DH, ET, ZK, tels que chacun des angles GHD, GTE, GKZ soit égal à l'angle BAG.

Alors je dis que l'arc AH est plus grand que l'arc KT et que les arcs AB, KZ sont ensemble égaux aux arcs DH, ET ensemble.

Théorème 6 : (idem - inégalité)

A nouveau ! Nous posons AH égal à TK. Alors je dis que BD est plus petit que EZ.
Et pareillement je dis que AB, KZ sont ensemble plus petits que DH, TE ensemble.

Théorème 7 : (idem)

On considère une figure triangulaire posée aux points A, B, G telle que le côté BG soit plus grand que le côté AB, l'angle ABG ne soit pas plus grand qu'un angle droit et le côté BG ne soit pas plus grand qu'un quadrant. Nous coupons AG en deux grands arcs égaux, à savoir AD, EZ, et à partir des points E, D, Z peuvent être tirés des arcs qui forment avec AG des angles qui sont égaux à l'angle correspondant. Nous fixons que ce soit l'angle BAG. Alors ils coupent l'arc BG, et soient les arcs DH, ET et ZK.

Alors je dis que TK est plus grand que BH et que les deux arcs AB, ZK sont ensemble plus petits que les deux arcs DH, TE ensemble.

Théorème 8 : (idem)

Et à nouveau ! Nous posons AD égal à GE et ce que nous avons cité précédemment reste comme c'était. Alors je dis que l'arc GT est plus grand que l'arc BH et que AB est plus petit que les deux arcs DH, TE ensemble.

Théorème 9 :(théorème des milieux)

On considère une figure triangulaire posée aux points A, B, G telle que son angle ABG ne soit pas plus grand qu'un angle droit et que la plus grande des arêtes AB, BG ne soit pas plus grande qu'un quadrant. D'un des deux arcs AB, BG peut être coupé en deux arcs égaux, appelés BD, EZ, et des points D, E, Z peuvent être tirés des arcs jusqu'à la base AG qui avec celle-ci forme un angle égal à l'angle que la base AG et le côté non-partagé renferment et qui se trouve opposé au côté partagé, appelés les arcs DH, ET, ZK. Et il est possible, parce que les deux angles aux points A, G sont plus petits que deux droits, et c'est la raison pour laquelle deux côtés AB, BG sont ensemble plus petits qu'un demi-cercle. Et c'est ce qui a été montré dans le théorème 1.

Alors je dis que dans la figure 1 l'arc AH, lequel se trouve à côté du côté non-partagé est plus grand que l'arc TK.

Théorème 10 :(idem inégalité)

Ensuite soit BG plus grand que AB et tout d'abord nous pouvons découper sur BG deux arcs égaux à savoir BD, EZ, et procéder comme nous l'avons fait précédemment.

Alors je dis que les deux arcs AB, ZK sont ensemble plus petits que les deux arcs DH, ET ensemble.

Théorème 11 :(idem)

Et à nouveau ! Nous considérons l'angle A aigu, menons les arcs BL, DM, EN et ZS respectivement égaux à BA, DH, ET et ZK. Ensuite les arcs BL, DM, EN et ZS engendrent avec la base AG dans un et même sens, à savoir le sens de A, le même angle. Les angles restants dans la direction de G sont alors également égaux et ceux dans la direction de G sont obtus parce que ceux dans la direction de A sont aigus. D'après les démonstrations précédentes les deux arcs DM, EN sont alors ensemble plus grands que les deux arcs BF, ZS ensemble. Ainsi les deux arcs AB, ZK sont ensemble plus petits que les deux arcs DH, ET ensemble parce que AB, ZK, DM et EN sont respectivement égaux à BL, ZS, DH et ET.

Théorème 12 : (idem)

Nous devons maintenant nous rappeler les démonstrations des cas restants de ce théorème si nous considérons l'angle en A aigu. Cela consiste à comparer également l'arc BD à l'arc EG, c'est-à-dire regarder si leur somme est plus petite ou plus grande que BG.

Alors je dis que l'arc AH est plus grand que l'arc GT.

Théorème 13 : (idem)

Et je dis également que l'arc AB est plus petit que les deux arcs DH, ET ensemble.

Revenons maintenant au triangle ABG, tel que BG soit le côté le plus grand et sinon ce que nous avons nommé reste comme c'était. Nous posons BD et EZ de AB, le plus petit des côtés, égaux et menons les arcs DH, ET, ZK tels que les angles DHA, ETA, ZKA soient égaux à l'angle BGA. Alors nous affirmons que la somme de BG et ZK est plus grande que la somme DH et ET.

Théorème 14 :(théorème des milieux, le 4ème angle est plus grand que les autres)

Soit une figure triangulaire posée aux points A, B, G telle que son côté BG soit plus grand que le côté AB, son angle B ne soit pas plus grand qu'un angle droit et son côté BG ne soit pas plus grand qu'un quadrant. A partir de celui-ci peuvent être tirés les arcs DH, ET, ZK tel que les arcs BD, AH soient respectivement égaux aux arcs EZ, TK et tel que également chacun des angles DHG, ETG soit égal à l'angle BAG.

Alors je dis que l'angle ZKG est plus grand que l'angle BAG.

Théorème 15 :(idem en prenant un de ceux du milieu non égal aux autres)

Et à nouveau ! Nous posons ZKG égal à chacun des deux angles DHG, BAG.

Alors je dis que l'angle ETG est plus petit que l'angle BAG.

Théorème 16 :(théorème des milieux, côtés égaux d'un côté, angles égaux de l'autre =>inégalité)

Soit une figure triangulaire posée aux points A, B, G telle que ses deux angles aux points A, G soient aigus, chacune des deux arêtes AB, BG ne soit pas plus grande qu'un quadrant, et BG ne soit pas plus grand que AB. Sur BG sont découpés deux arcs de même longueur, à savoir BD, EZ et à partir des points D, E, Z jusqu'à la base sont tirés les arcs DH, ET, ZK. Et les angles qu'ils forment avec la base et correspondant à l'angle BAG, c'est-à-dire dans la direction de G, sont égaux à l'angle BAG.

Alors je dis que AH est plus grand que TK.

Théorème 17 :(idem)

Maintenant soit BG plus petit que BA et nous procédons comme nous avons procédé ci-dessus.

Alors je dis que AH est plus grand que TK.

Théorème 18 :(report de deux arcs égaux sur le quadrillage de la sphère)

Soit, sur une boule, un grand cercle passant par les points T, M, B, qui est tangent à un cercle parallèle passant par les points D et E. Soit QRXVB le plus grand cercle parallèle, sur TB peuvent être découpés deux grands arcs égaux, à savoir les deux grands arcs TK, LM. On tire des grands cercles qui passent par le pôle H et par les points T, K, L, M à savoir HTQ, HKR, HLX, HMV, et on tire des cercles parallèles qui passent par les points K, L, M, à savoir les cercles KS, LO, MF.

Alors je dis que l'arc FO est plus grand que l'arc ST et que l'arc QR est plus grand que l'arc XV.

Théorème 19 :(théorème des milieux avec les triangles opposés au sommets IMPORTANT)

Soit sur une boule deux grands cercles appelés ABE, HTL qui se coupent en G. On découpe sur un des deux cercles les deux arcs AB, DE, et tels que leur distance au point G soit égale. On tire des arcs de grand cercle qui passent par les points A, B, D, E et par un des deux pôles d'un des deux cercles ABE, HGL, appelé les arcs ZAH, ZBT, ZKD, ZLE.

Alors je dis que l'arc HT est égal à l'arc KL.

Théorème 20 :(report de deux arcs égaux sur le quadrillage de la sphère)

Soit sur une boule un grand cercle passant par A, M, B, qui est tangent à un cercle parallèle appelé le cercle ADE. Soit GQZXVB le plus grand cercle parallèle. On découpe sur AMB deux grands cercles égaux, appelés TK, LM. Nous décrivons des cercles qui passent par les extrémités de ces deux arcs, tantôt de cercles parallèles, appelés KS, LO, MF, et tantôt des qui soit passent par les deux pôles du cercles parallèle soit qui touchent un et même cercle, le plus petit étant le cercle ADE, qui sont inclinés dans la même direction que le cercle AMD et le cercle BG.

Alors je dis que FO est plus grand que TS et que QZ est plus grand que XV.

Théorème 21 :(report de deux arcs égaux sur les parallèles et des cercles tangents à un même cercle)

Soit sur une boule un grand cercle passant par A, B, qui est tangent à un cercle parallèle appelé le cercle ADE. Soit BZQ le plus grand cercle parallèle. On découpe sur AB deux grands cercles égaux, appelés TK, LM, et on dessine des cercles, qui passent par les extrémités de ces deux arcs, des cercles parallèles à savoir KS, LO, et MF et d'autres cercles de grands cercles à savoir TQ, KE, LX, MV qui peuvent être tangents à un et même cercle parallèle, dont le plus grand est le cercle ADE.

Alors je dis que l'arc FO est plus petit que l'arc ST et que l'arc VX est plus petit que l'arc QZ.

Troisième livre

Quelques syllogismes qui simplifieront la compréhension de la troisième partie.

1. Les deux droites AB, AG se coupent au point A, et on tirera à partir des deux points B, G les deux droites BE, GD qui se coupent en Z. Alors je dis, que le rapport GA sur AE est égal au produit du rapport GD sur DZ par le rapport ZB sur BE.

Nous menons à savoir EH parallèlement à GD. Alors l'angle HEA est égal à l'angle DGA et l'angle A est commun aux deux triangles AGD, AEH. Il résulte que le troisième est égal au troisième. Ainsi les deux triangles sont semblables. Alors le rapport GA sur AE est égal au rapport GD sur EH, le rapport GD sur EH est, lui égal au produit du rapport GD sur DZ par le rapport DZ sur EH. Par conséquent, le rapport GA sur AE est égal au produit du rapport GD sur DZ par le rapport DZ sur EH. Le rapport DZ sur EH est, lui, égal au rapport BZ sur BE, car les deux triangles BHE, BDZ sont semblables. Par conséquent, le rapport GA sur AE est égal au produit du rapport GD sur DZ par le rapport ZB sur BE. Et c'est ce que nous voulions démontrer !

2. Soit le cercle ABG de centre D, tel que les points G, B, A soient quelconques sur la circonférence, et que l'arc GA soit plus petit qu'un demi-cercle. Alors je dis que sin AB sur sin BG est égal au rapport AE sur EG, lesquels font partie de la corde de leur somme, qui est coupée en deux par le diamètre tiré à partir du point B.

Si les deux arcs GB, BA sont égaux, alors c'est évident. Si, par contre, l'un des deux est plus petit, alors supposons que ce soit BG qui soit plus petit. On tire GH, AZ verticalement sur le diamètre. Alors ce sont les deux sinus des deux arcs AB, BG. Parce que les deux triangles AEZ, GHE sont semblables, alors le rapport GH sur AZ est égal au rapport GE sur EA. Et c'est ce que nous voulions démontrer !

3. Soit le cercle ABG avec le point D comme centre, et les deux droites TDE, GBE, qui se rencontrent en E, qui le coupent. Alors je dis que le rapport du sinus de l'arc GA sur le sinus de l'arc BA est égal au rapport GE sur BE.

Nous menons à savoir GH, BZ verticalement sur TE. Comme maintenant les deux angles H, Z sont droits et l'angle E est commun aux deux triangles HEG, ZEB, alors le troisième est égal au troisième. Ainsi les deux triangles sont semblables. C'est pourquoi le rapport GH sur BZ est égal au rapport GE sur EB. Et c'est ce que nous voulions démontrer !

4. Le rapport A sur B est égal au produit du rapport G sur D par le rapport E sur Z.

Alors je dis que le rapport G, le troisième, sur D, le quatrième, est égal au produit du rapport A, le premier, sur B, le deuxième, par le rapport Z, le sixième, sur E, le cinquième.

Nous posons à savoir le rapport H sur T égal au rapport G sur D et posons le rapport T sur J égal au rapport E sur Z. Comme maintenant le rapport H sur J est égal au produit du rapport H sur T par le rapport T sur J, alors il est égal au produit du rapport G sur D par le rapport E sur Z. Ainsi le rapport H sur J est égal au rapport A sur B. Ensuite nous posons J comme proportion moyenne entre H et T. Alors le rapport H sur T est égal au produit du rapport H sur J par le rapport J sur T. Le rapport H sur T est le rapport G sur D. Ainsi le rapport G sur D est égal au produit du rapport H sur J, c'est-à-dire le rapport A sur B, par le rapport J sur T, c'est-à-dire le rapport Z sur E. Et c'est ce que nous voulions démontrer !

5. Soit le rapport A sur B égal au rapport G sur D, et le rapport E sur Z égal au rapport de l'identité.

Alors, je dis que le rapport A sur B est égal au produit du rapport G sur D par le rapport E sur Z.

Soit H égal à B. Alors le rapport A sur H est égal au rapport G sur D, et le rapport H sur B est égal au rapport E sur Z. Le rapport A sur B, lui, est égal au produit du rapport A sur H par le rapport H sur B. Par conséquent, le rapport A sur B est égal au produit du rapport G sur D par le rapport E sur Z. Et c'est ce que nous voulions démontrer !

Théorème 1 :(théorème de Ménélaüs)

Les deux arcs GE, BD se rencontrent au point A et à partir des points G, D sont tirés les deux arcs GD, BE qui se coupent au point Z. Isolément chacun de ces quatre cercles appartient au périmètre d'un grand cercle de la boule, et chacun d'entre eux est plus petit qu'un demi-périmètre.

Alors je dis que le rapport sin GE sur sin EA est égal au produit du rapport du sinus de l'arc GZ sur le sinus de l'arc ZD par le rapport du sinus de l'arc DB sur le sinus de l'arc BA.

$$\frac{sinGE}{sinEA}=\frac{sinGZ}{sinZD}\cdot\frac{sinDB}{sinBA}$$

Théorème 2 :(règle des 4 quantités : 2 triangles avec 2 angles égaux et rapport des sinus des arcs)

Soient deux figures trilatères posées en ABG et DEZ telles que l'angle en A de l'une soit égal à l'angle en D de l'autre, et leurs deux angles aux deux points G, Z soient égaux ou égaux ensemble à deux droits.

Alors je dis que le rapport sinus AB sur sinus BG est égal au rapport sinus DE sur sinus EZ.

$$\frac{sinAB}{sinBG}=\frac{sinDE}{sinEZ}$$

Théorème 3 :(règle des ombres : idem avec un angle droit)

Soient deux figures trilatères posées en ABG et DEZ telles que leurs deux angles aux points A, D soient égaux à deux droits et les deux angles aux deux points G, Z soient égaux mais non droits et les deux pôles des deux arcs AG, DZ soient les deux points H, T.

Alors je dis que le rapport sin AB sur sin AG est égal au produit du rapport du sinus de l'arc EG sur le sinus de l'arc DZ par le rapport du sinus de l'arc BH sur le sinus de l'arc ET.

$$\frac{sinAB}{sinAG}=\frac{sinEG}{sinDZ}\cdot\frac{sinBH}{sinET}$$

Théorème 4 :(combinaison de 2et 3)

Soient deux figures trilatères posées en ABG et DEZ telles que l'angle en A de l'une soit égal à l'angle en D de l'autre, l'angle au point G soit égal à l'angle au point Z de telle sorte qu'aucun de ces angles ne soit droit, et nous menons à partir des deux points B, E deux verticales par rapport aux deux bases AG, DZ appelées BH, ET.

Alors je dis que le rapport du sinus de l'arc AH sur le sinus de l'arc DT est égal au rapport du sinus de l'arc DT sur le sinus de l'arc TZ.

$$\frac{sinAH}{sinDT}=\frac{sinDT}{sinTZ}$$

Théorème 5 :(implication aux rapports de sinus la simili-ressemblance de deux triangles rectangles)

Soient deux figures trilatères posées en ABG et DEZ telles que leurs deux angles aux points A, D soient égaux à deux droits, les deux angles aux deux points G, Z soient égaux et aigus, et chacun des deux arcs GA, DZ soit plus petit qu'un quadrant.

Alors je dis que le rapport du sinus de la somme des deux arcs BG, GA sur celui de la différence entre BG et BA est égal au rapport du sinus de la somme des deux arcs GA, DZ sur celui de la différence entre GA et DZ.

$$\frac{sinBG+GA}{sinBG-GA}=\frac{sinGA+DZ}{sinGA-DZ}$$

Théorème 6 :(bissectrice et rapport de sinus, rapport anharmonique)

Soit une figure triangulaire posée sur ABG telle que l'arc BD coupe en deux l'angle au point B.

Alors je dis que le rapport du sinus de l'arc AB sur le sinus de l'arc AD est égal au rapport du sinus de l'arc BG sur le sinus de l'arc DG.

$$\frac{sinAB}{sinAD}=\frac{sinBG}{sinDG}$$

Théorème 7 :(idem)

Et à nouveau ! Nous posons que l'angle qui se trouve à côté de ABG est coupé en deux par l'arc BD.

Alors je dis que le rapport du sinus de l'arc AB sur le sinus de l'arc BG est égal au rapport du sinus de l'arc AD sur le sinus de l'arc DG. Et réciproquement !

$$\frac{sinAB}{sinBG}=\frac{sinAD}{sinDG}$$

Théorème 8 :

Soit une figure triangulaire posée sur ABG, on tire à partir du point B jusqu'à la base AG deux arcs BD, BE tels que les deux angles ABD, GDE soient égaux.

Alors je dis que le rapport du carré du sinus de l'arc AB sur le carré du sinus de l'arc BG est égal au rapport des rectangles que sin EA et sin AD contiennent sur le rectangle que sin DG et sin GE renferment.

Théorème 9 :

Et à nouveau ! Nous supposons que le rapport du carré du sinus de l'arc AB sur le carré du sinus de l'arc BG est égal au rapport des rectangles que sin EA et sin AD contiennent sur le rectangle que sin DG et sin GE renferment.

Alors je dis que l'angle ABD est égal à l'angle GBE.

Théorème 10 :(deux angles égaux,angle au sommet droit, rapport anharmonique égal à 1)

Soit une figure triangulaire posée aux points A, B, G telle que son angle au point B soit droit, on tire à partir de B jusqu'à la base deux arcs, qui se trouvent en BD et BE et ils peuvent renfermer avec l'arc AB deux grands angles égaux.

Alors je dis que le rapport du sinus de l'arc GE sur le sinus de l'arc AE est égal au rapport du sinus de l'arc GD sur le sinus de l'arc AD.

$$\frac{sinGE}{sinAE}=\frac{sinGD}{sinAD}$$

Et à nouveau ! Nous supposons que le rapport du sinus de l'arc GE sur le sinus de l'arc AE est égal au rapport du sinus de l'arc GD sur le sinus de l'arc AD et que l'angle EBA est égal à l'angle ABD. Alors je dis que l'angle ABG est droit.

Théorème 11 :(idem)

Et à nouveau ! Nous supposons que le rapport du sinus de l'arc GE sur le sinus de l'arc AE est égal au rapport du sinus de l'arc GD sur le sinus de l'arc AD et que l'angle ABG est droit.

Alors je dis que l'angle EBA est égal à l'angle ABD.

Théorème 12 :(intersection des bissectrices)

Soit une figure triangulaire posée aux points A, B, G telle que les deux angles aux points A, G sont coupés en deux par les arcs AD, GD et on relie les points B, D par l'arc DB.

Alors je dis que DB coupe en deux l'angle ABG.

$\widehat{GAD}=\widehat{DAB}\ et\ \widehat{BGD}=\widehat{DGA}\Rightarrow\widehat{ABD}=\widehat{DBG}$

Théorème 13 :(intersection des hauteurs)

Soit la figure triangulaire posée aux points A, B, G. Nous menons à partir des deux points A, G jusqu'aux deux côtés BG, BA les deux perpendiculaires AD, GE qui se coupent au point Z et nous menons l'arc ZB et le prolongeons jusqu'en l'arc AG qui coupe celui-ci en H.

Alors je dis que l'arc BH est perpendiculaire au côté AG.

Théorème 14 :(inégalité de Thalès avec parallélisme ~ égalité d'angle)

Soit la figure triangulaire posée aux points A, B, G telle que le côté BG soit plus long que le côté AG, mais telle que le côté BG ne soit pas plus long qu'un quadrant, sur le l'arc BG peuvent être découpés deux arcs appelés GD, TZ et à partir des extrémités peuvent être tirés les arcs DE, ZH, TK et peuvent avec la base engendrer des angles égaux à l'angle au point A.

Alors je dis que :

1) Si l'arc DG est égal à l'arc ZT, alors la différence entre les deux arcs GA, DE est plus petite que la différence entre les arcs ZH, TK.

2) Si les deux différences entre les arcs mentionnés plus haut sont égales entre elles, alors l'arc GD est plus grand que l'arc ZT.

3) Si l'arc GD avec la différence entre les deux arcs GA, DE est égal à l'arc ZT avec la différence entre les arcs ZH, TK, alors l'arc GD est plus grand que l'arc ZT.

4) Si la différence entre l'arc GD et la différence les deux arcs GA, DE est égale à la différence entre l'arc ZT et la différence les deux arcs ZH, TK, alors l'arc GD est plus petit que l'arc ZT. **???**

Et pour résumer je dis que le rapport GD sur ZT est plus grand que le rapport de la différence entre les deux arcs AG, DE sur la différence entre les deux arcs ZH, TK.

Théorème 15 :(idem avec des angles droits)

Soit une figure triangulaire posée aux points A, B, G telle que son angle au point B soit aigu, son angle au point A soit droit, le côté BG ne soit pas plus grand qu'un quadrant, sur le côté BG puissent être découpés deux arcs appelés GD et ZT et à partir de leur extrémité puissent être tirés jusqu'en la base AB les verticales DE, ZH et TK.

Alors je dis que :

1) Si l'arc GD est égal à l'arc ZT, alors l'arc AE est plus grand que l'arc HK

2) Et si l'arc AE est égal à l'arc HK alors l'arc GD est plus petit que l'arc ZT,

3) Et si les deux arcs AE et DG sont ensemble égaux aux deux arcs HK et ZT pris ensemble, alors l'arc GD est plus petit que l'arc ZT,

4) Et si la différence entre les deux arcs AG et DE est égale à la différence entre les deux arcs ZH et TK, alors les arcs l'arc GD est plus grand que l'arc ZT,

5) Et en résumé que le rapport AE sur HK est plus grand que le rapport GD sur ZT.

$$\frac{AE}{HK} \geqslant \frac{GD}{ZT}$$

Théorème 16 :

Ce qui est d'une autre façon claire.

Théorème 17 :(idem si la hauteur est à l'extérieur)

Soit une figure triangulaire posée aux points A, B, G telle que AG soit plus grand que BG, AG ne soit pas plus grand qu'un quadrant. On découpe sur BG les deux arcs GD, DZ. Nous pouvons tirer à partir de leur extrémité jusqu'à la base AB des arcs qui renferment avec celle-ci des angles qui sont égaux à l'angle correspondant au point A à savoir les deux arcs DE, ZH, et des arcs qui arrivent perpendiculairement sur AB à savoir GT, DK et ZL.

Alors je dis que :

1)Si l'arc AE est égal à l'arc EH, alors l'arc TK est plus petit que l'arc LK

2)Si l'arc TK est égal à l'arc LK, alors l'arc AE est plus grand que l'arc EH,

3)Et en résumé le rapport AE sur EH est plus grand que le rapport TK sur KL.

$$\frac{AE}{EH} \geqslant \frac{TK}{KL}$$

Théorème 18 :(idem)

Et il est également clair que si l'angle en A de la figure triangulaire ABG est obtus, celui au point B est aigu, l'arc BG n'est pas plus grand qu'un quadrant, sur l'arc BG sont découpés les deux arcs GD, DZ et à partir de la base AB sont tirés les deux arcs DE, ZH tels qu'ils renferment avec la base des angles qui sont égaux avec l'angle au point A correspondant, de même pour les verticales GT, DK et ZL. Alors en résumé le rapport AE sur EH est plus grand que le rapport TK sur KL. Et là-dessus il est également clair que le rapport AE sur EH est plus grand que le rapport GD sur DZ.

$$\frac{AE}{EH} \geqslant \frac{TK}{KL} \quad , \quad \frac{AE}{EH} \geqslant \frac{GD}{DZ}$$

Théorème 19 :(à partir de 3 points partent 2 couples de 3 droites arrivant avec des angles égaux sur une base)

Soit une figure triangulaire posée aux points A, B, G telle que AG soit plus grand que BG mais pas plus grand qu'un quadrant et nous menons à partir du point G jusqu'à la base AB l'arc GD qui n'est pas plus grand que l'arc BG. Sur BG peuvent être découpés deux arcs, à savoir GE et EZ, et à partir de leur extrémité jusqu'à la base AB sont tirés les deux arcs EH et ZT qui peuvent renfermer avec la base des angles qui sont égaux avec l'angle au point A, et également les deux arcs EK et ZL sont tirés de telle sorte qu'avec AB ils puissent renfermer des angles qui sont égaux à l'angle au point D.

Alors je dis que le rapport AH sur HT est plus grand que le rapport DK sur KL.

$$\frac{AH}{HT} \geqslant \frac{DK}{KL}$$

Théorème 20 :(idem avec l'angle en B droit)

Et à nouveau ! Nous posons que l'angle au point B comme droit.

Théorème 21 :(idem A aigu, B obtus)

Également il sera montré de la même manière que si l'angle au point A de la figure triangulaire ABG est aigu, son angle au point B est obtus, le côté AG n 'est pas plus grand qu'un quadrant, à partir du point G jusqu'à la base AB est tiré l'arc GD, sur AG sont découpés les deux arcs GE, EZ, et les deux arcs EH, ZT sont tirés tels qu'ils engendrent avec la base AB deux angles sont égaux à l'angle au point B, de la même manière sont tirés les deux arcs EK, ZL de telle sorte qu'ils engendrent avec la base AB deux angles qui sont égaux à l'angle au point D, alors le rapport DL sur KL est plus grand que le rapport BH sur HT.

$$\frac{DL}{KL} \geqslant \frac{BH}{HT}$$

Théorème 22 :(inclusion de deux triangles rectangles)

Soit sur une boule deux grands cercles posés sur AB et BG, tels que chacun d'eux soit penché par rapport à l'autre. Nous distinguons sur AB les deux points D, E, et menons à partir des deux points D, E jusqu'à BG les deux verticales DG et EH.

Alors je dis que le rapport du sinus de GH sur le sinus de DE est égal au rapport du rectangle qui renferme le diamètre du grand cercle et le diamètre du cercle tangent à AB et parallèle à BG sur le rectangle qui renferme les deux diamètres des deux cercles qui passent par les points D, E et qui sont parallèles au cercle BG.

Théorème 23 :

Soient les deux cercles AB, BG penchés l'un par rapport à l'autre, et nous menons un cercles qui passe par leur pôle et posé aux points Z, A, T de telle sorte que le point Z soit un pôle du cercle TB et nous menons également à partir du point Z un arc de grand cercle posé aux points Z, K, M tel que le sinus de l'arc ZK soit proportionnel aux deux sinus des deux arcs ZM, ZA et tel qu'il se trouve deux. Si nous procédons de cette manière, nous avons le diamètre du cercle qui est parallèle au cercle BT et qui passe par le point K qui se trouve proportionnellement à la moitié entre le diamètre de la boule et le diamètre du cercle qui est tangent au cercle AB et parallèle au cercle BT.

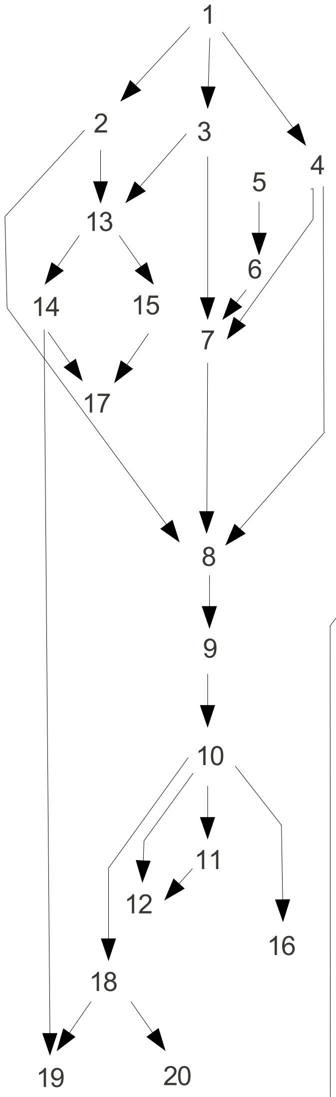
Alors je dis que la différence entre les deux arcs KB et MB est connue et que chacun est plus grand que la différence entre n'importe quelle paire d'arcs qui sont pris de cette manière.

Théorème 24 : (idem)

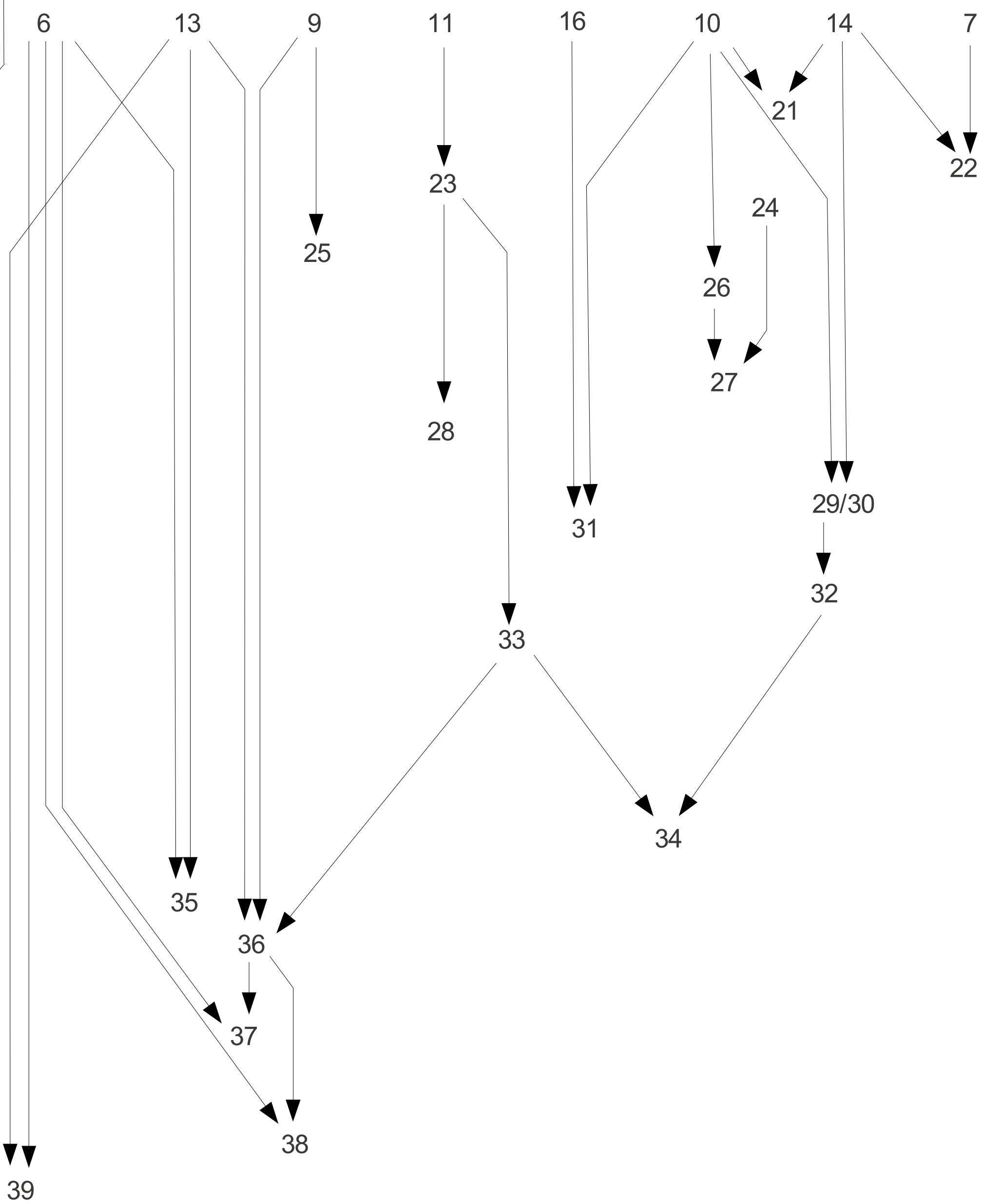
Soit maintenant le point Z un pôle du cercle BG, tel que l'arc BD ne soit pas plus grand qu'un quadrant et que l'arc GH soit plus grand que l'arc DE.

Alors je dis que le rapport GH sur DE est plus petit que le rapport du diamètre de la boule sur le diamètre du cercle qui est parallèle au cercle BG et qui passe par le point D.

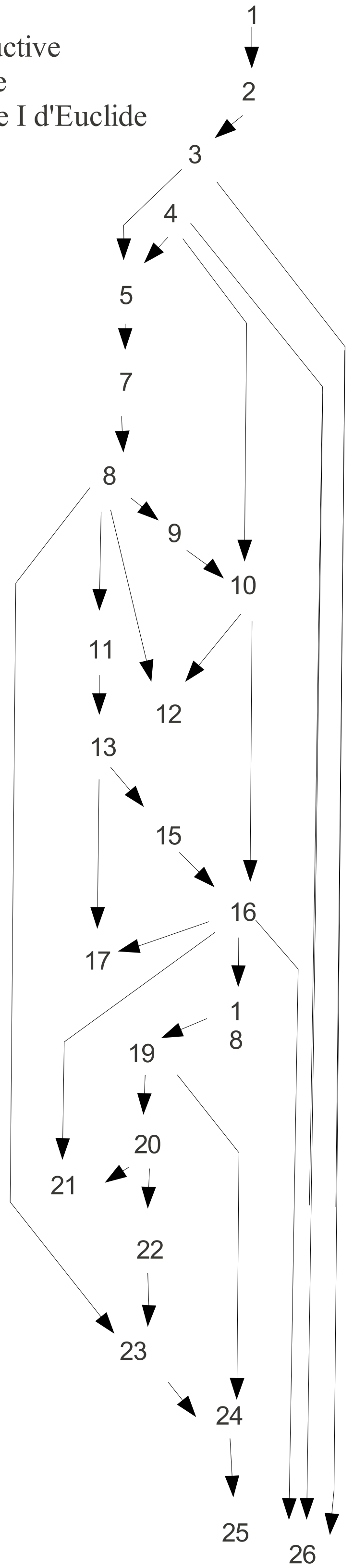
Linéarité déductive
des propositions 1-20
du Livre I de Ménélaüs



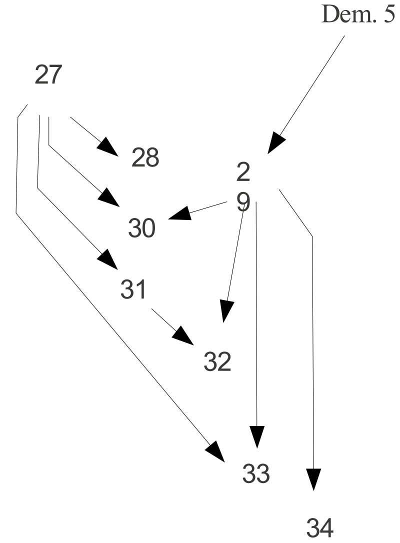
Linéarité déductive
des propositions 21-39
du Livre I de Ménélaüs



Linéarité déductive
De la première
Partie du Livre I d'Euclide



Théorie des parallèles



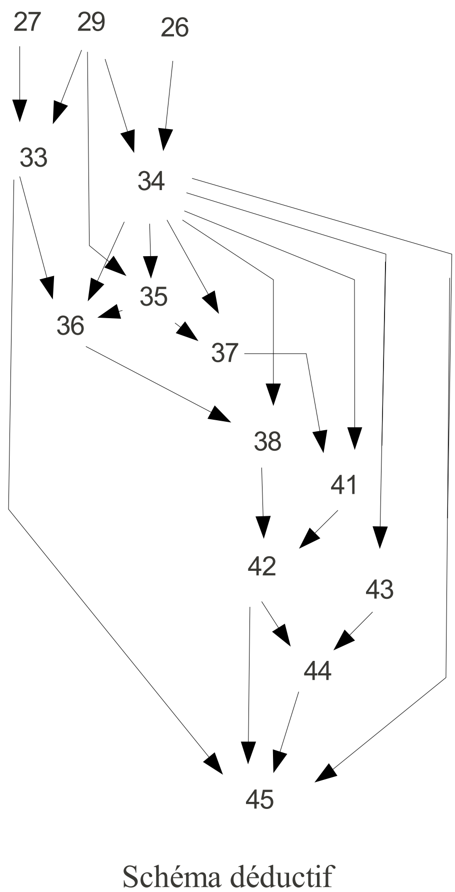


Schéma déductif
Pour I. 45 Eucl.

Sources

- *Les éléments*, Volume I, Livres I-IV, traduction et interprétations par Bernard Vitrac des commentaire de Proclus, PUF, 1990
- *The Discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum*, Kurt von Fritz, Annals of Mathematics
- *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la science grecque III : l'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*, Maurice Caveing, 1998
- *Les Sphériques de Théodose de Tripoli,* Traduction de Ver Eecke, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1959
- *Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der verbesserung von Abū Nasr Mansūr B. 'Ali b. 'Irăq, Max KRAUSE*, Weidmannsche Buchhandlung, 1936
- *Grundlagen der Geometrie*, D. Hilbert, traduction française de P. Rossier. Paris, Dunod, 1971
- Bourbaki, 1948
- *L'enseignement des mathématiques en France (1970-1990)*, Rudolf Bkouche
- *La place de la géométrie dans l'enseignement des mathématiques en France : de la réforme de 1902 à la réforme des mathématiques modernes.*
- *Traité de géométrie,* Eugène Rouché , Charles de Comberousse, imprimerie Gauthier Villard, 1883
- *Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles*, Bkouche Rudolf , 2000 Bulletin de l'APMEP. Num. 430.
- *Géométrie* de Michel Audin
- *Analyse Complexe*, Eric Amar, Etienne Matheron
- *Géométrie*, P Tauvel, 2005, DUNOD
- *Géométries élémentaires (tome 1)*, Henri LOMBARDI, 1999, pufc
- *Astronomie fondamentale,* Gianni PASCOLI, DUNOD, 2000
- Commentaire des *Sphériques* de R. NADAL, A. TAHA, P. PINEL