MASTER DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE

CONTROLABILITE APPROCHEE, OPTIMISATION ET CONVERGENCE NUMERIQUE DES EQUATIONS DE DIFFUSIONS LINEAIRES

DUPREZ Michel

Sous le tutorat de : AMMAR KHODJA Farid et CHOULY Franz

Jury : AMMAR KHODJA Farid, CHOULY Franz et
MOKHTAR-KHARROUBI Mustapha

M2 semestre 2, année 2012

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce mémoire fait l'étude des équations de diffusions linéaires à travers trois vastes domaines : la théorie du contrôle, l'optimisation et l'analyse numérique. A partir d'un problème de contrôlabilité donné, nous démontrerons l'existence et l'unicité d'une solution optimale (en un sens à préciser), et nous en calculerons une approximation numérique. Notre démarche sera ainsi complète.

Que signifie contrôler un système d'équations ? En général, pour contrôler un système d'équations, on part d'un système admettant une unique solution sur lequel on a le choix d'un des paramètres que l'on appellera contrôle. Le système devient ainsi sur-déterminé et on essayera, dans la mesure du possible, de trouver le contrôle qui nous permettra, par exemple, d'atteindre une cible ou encore d'optimiser une donnée.

La contrôlabilité qui nous intéresse est l'étude des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques (dépendant du temps noté t) sur lesquels on agit à l'aide d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial (à l'instant initial $t = t_0$) proche d'un état final (à un instant $t = T$), ce que l'on appelle la *contrôlabilité approchée.*

Nous étudierons la contrôlabilité approchée du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \dfrac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y = v\mathbb{1}_{\omega\times(0,T)}, & sur\ Q_T = \Omega \times (0,T) \\ y = 0, & sur\ \Sigma_T = \Gamma \times (0,T) \\ y(0) = y_0, & \end{array} \right.$$

où Ω est un ensemble ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, d $\in \mathbb{N}^*$, ω un sous-ensemble ouvert de Ω, Γ la frontière de Ω, $\mathbb{1}_{\omega\times(0,T)}$ est la fonction caractéristique sur $\omega_T = \omega \times (0,T)$ et $\mathcal{A}$ est un opérateur elliptique du second ordre, et v le contrôle de notre système.

Les solutions y cherchées vivront dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, la dérivée en temps de y sera considérée comme élément de $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, nous prendrons notre contrôle v dans $L^2((0,T)\times\Omega)\equiv L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et enfin l'opérateur différentiel $\mathcal{A}$ ira de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ (dual de $H_0^1(\Omega)$).

Pour résoudre la contrôlabilité approchée, nous aurons besoin des solutions du problème direct. Nous commencerons donc par démontrer l'existence et l'unicité de telles solutions. Pour cela, on résout le problème sur des sous-espaces de dimension finie (qui convergent en un sens à préciser vers notre espace), ce qui correspond, au niveau numérique, à résoudre un sytème matriciel. On montre que ces solutions sont uniformément bornées, ce qui nous permet d'en extraire une sous-suite faiblement convergente vers une certaine fonction u. On vérifie que u est solution de notre problème direct, on en conclut que la suite entière converge vers u et enfin on démontre la convergence forte. Cette démonstration, appelée *méthode de Galerkin*, a deux grands atouts : d'une part la démarche peut être calquée sur beaucoup d'autres problèmes similaires, et d'autre part, pour trouver la solution approchée, il n'y a plus qu'à appliquer la méthode des éléments finis, le chemin étant déjà tout tracé.

Nous démontrerons la contrôlabilité de notre problème et nous chercherons le contrôle qui nous permettra d'être à une certaine distance de notre cible et qui minimisera une certaine norme. Pour ce faire, nous transcrirons le problème pénalisé associé en son problème dual, sur lequel il sera plus facile d'appliquer un schéma numérique.

Pour trouver une approximation numérique de notre contrôle optimal, nous fabriquerons un schéma qui approxime la solution du problème pénalisé à l'aide d'une discrétisation en temps dite *Euler implicite*, d'une discrétisation en espace par éléments finis, et d'un algorithme du gradient à pas constant. Nous ne ferons qu'énoncer le théorème de convergence de ce schéma par manque de temps.

Enfin, nous programmerons notre schéma numérique à l'aide de Matlab, sur l'équation de la chaleur, et nous estimerons son ordre de convergence. Les détails sont accessibles dans l'annexe.

Le début du premier chapitre sera consacré en partie à la démonstration de théorèmes de points fixes sur les applications multivoques qui sont utiles pour la résolution de problème de contrôle non-linéaire. Cette partie est un peu à part puisque nous ne l'utilisons pas par la suite. Ces théorèmes sont utiles lorsque l'on étudie la contrôlabilité d'une système non-linéaire : on linéarise le système en gelant la partie linéaire, on réinjecte l'ensemble des solutions du problème de contrôle linéarisé et ainsi de suite. Les théorèmes de points fixes étudiés ici permettront d'extraire une solution du problème non-linéaire.

CHAPITRE 1
RAPPELS

Dans un premier temps, en nous inspirant largement de D. R. Smart, *Fixed point theorems*, nous admettrons le théorème de Brouwer qui ne nous sera pas utile pour la suite et démontrerons à nouveau tout d'abord celui dû à Schauder, puis celui dû à Kakutani. Enfin, nous rappellerons le théroème Lax-Milgram qui est capital lorsque l'on traduit des problèmes aux limites sous forme variationnelle en nous basant sur *Analyse numérique et optimisation* G. Allaire.

Sommaire

1.1 Théorème de Brouwer

Pour la suite, nous aurons besoin d'admettre le théorème de Brouwer :

Définition 1.1. On dit qu'un espace topologique $\mathcal{X}$ possède la *propriété du point fixe* si toute application continue de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$ admet un point fixe.

Théorème 1.1. *(Brouwer, 1910)*
(i) La boule unité B^n de $\mathbb{R}^n$ a la propriété du point fixe.
(ii) Tout sous-ensemble compact non-vide $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}^n$ a la propriété du point fixe.

1.2 Théorème de Schauder

Nous allons étudier une propriété de point fixe dans $\mathcal{H}_0$, un sous-ensemble de l^2, pour ensuite généraliser ce résultat à des sous-ensembles d'espace de Banach.

Définition 1.2. On dira que $\mathcal{R}$ est une rétraction de $\mathcal{S}$ si $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ et s'il existe une application continue r de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{R}$ telle que $r = I$ sur $\mathcal{R}$.

Théorème 1.2. *Si $\mathcal{Y}$ a la propriété du point fixe et si $\mathcal{X}$ est une rétraction de $\mathcal{Y}$, alors $\mathcal{X}$ a la propriété du point fixe.*

Démonstration. Soit r l'application de rétraction associée. Si T est une application continue de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$, alors Tr est une application continue de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{X}$. Comme Tr va de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Y}$, il existe un point fixe w, ainsi $Trw = w$. Clairement $w \in \mathcal{X}$ tel que $rw = w$ et donc $Tw = w$. □

Théorème 1.3. *Si $\mathcal{X}$ est homéomorphe à $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}$ a la propriété du point fixe, alors $\mathcal{Y}$ a la propriété du point fixe.*

Démonstration. Soit $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ l'homéomorphisme associé et $f : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$ une application continue. Alors φ o f o $\varphi^{-1} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ est une application continue. Comme $\mathcal{X}$ a la propriété du point fixe, il existe $x \in \mathcal{X}$ tel que φ o f o $\varphi^{-1}(x) = x$; d'où f *o* $\varphi^{-1}(x) = \varphi^{-1}(x)$. □

Définition 1.3. Le *cube de Hilbert* $\mathcal{H}_0$ est le sous-ensemble de l^2 constitué des points
$a = (a_1, a_2, ...)$ tels que $|a_r| \leq r^{-1}$ pour tout r.

Théorème 1.4. *Tout sous-ensemble convexe compact $\mathcal{K}$ d'un espace de Banach $\mathcal{B}$ est homéomorphe, par rapport à une application linéaire, à un sous-ensemble compact de $\mathcal{H}_0$.*

Démonstration. Nous supposons, sans perdre de généralités, que $\mathcal{K}$ est un sous-ensemble de la boule unité dans $\mathcal{B}$, par homothétie. Comme $\mathcal{K}$ et vect($\mathcal{K}$), l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{K}$, sont séparables, nous pouvons choisir une suite (x_n) dense dans vect($\mathcal{K}$). Pour

n=1,2,...

choisissons f_n dans l'espace dual $\mathcal{B}^*$ telle que

$$f_n(x_n) = \|x_n\|/n, \ \|f_n\| = 1/n$$

Donc l'application

$$F : x \longrightarrow (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...)$$

va clairement de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{H}_0$.
Nous pouvons remarquer que F est un opérateur linéaire borné de $\mathcal{B}$ dans l^2.
F est injective sur vect($\mathcal{K}$) car si $x \neq y$ dans vect($\mathcal{K}$) nous avons

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_n(y)| &\geq |f_n(x_n)| - |f_n(x - y - x_n)| \\
&\geq \frac{\|x_n\|}{n} - \frac{\|(x-y) - x_n\|}{n} > 0 \\
&> 0,
\end{aligned}$$

si x_n est suffisamment proche de x - y. Ainsi F est un homéomorphisme sur $\mathcal{K}$ dans $F(\mathcal{K})$, car F est injective et continue sur l'espace compact $\mathcal{K}$.
Nous concluons maintenant que $F(\mathcal{K})$ est compact et convexe, car un homéomorphisme linéaire préserve ces propriétés. □

Théorème 1.5. *Tout sous-ensemble compact convexe non-vide $\mathcal{X}$ de $\mathcal{H}_0$ a la propriété du point fixe.*

Démonstration. $\mathcal{X}$ est une rétraction de $\mathcal{H}_0$; d'après le théorème 1.2, $\mathcal{X}$ a la propriété du point fixe. □

Théorème 1.6. *(Schauder, 1930) Tout sous-ensemble compact convexe non-vide $\mathcal{Y}$ d'un espace normé a la propriété du point fixe.*

Démonstration. D'après le théorème 1.4, $\mathcal{Y}$ est homéomorphe à un sous-ensemble compact convexe $\mathcal{X}$ de $\mathcal{H}_0$; d'après le théorème 1.5, $\mathcal{X}$ a la propriété du point fixe ; ainsi le théorème 1.3 donne le résultat. □

1.3 Théorème de Kakutani

1.3.1 Introduction

Cette partie étudie les points fixes de certaines applications multivoques, c'est-à-dire les applications qui à chaque élément de l'espace de définition associe non pas un élément mais un ensemble d'éléments. Les propriétés sont d'abord établies sur $\mathbb{R}^m$ et sur le cube de Hilbert, un sous-ensemble de l^2, avant de les étendre à des espaces plus généraux.

1.3.2 Définition et premières propriétés

Rappelons brièvement ce qu'est une application multivoque, la propriété de Kakutani et démontrons quelques propriétés et le théorème de Kalutani sur $\mathbb{R}^m$.

Définition 1.4. Soit $\mathcal{S}$ et $\mathcal{F}$ deux sous-ensembles de l'espace normé $\mathcal{B}$. Nous dirons que U est une K-*application* de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{F}$ si :

(i) Pour tout $x \in \mathcal{S}$ est défini un sous-espace compact convexe non-vide *U(x)* de $\mathcal{T}$;

(ii) Le graphe de U,

$$\mathcal{G}(U) = \{(x, y) : y \in U(x)\}$$

est fermé dans $\mathcal{S} \times \mathcal{F}$.

Remarque 1.1. Chaque application continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{F}$ peut être vue comme une K-application.
La condition (ii) est équivalente à la condition suivante, décrite comme "semi-continuité supérieure" par Kakutani (1941) :

$$\text{(ii)' si } x_n \to x \text{ dans } \mathcal{S},\ y_n \in U(x_n) \text{ et } y_n \to y \text{ alors } y \in U(x).$$

Définition 1.5. Un *point fixe* pour une K-application U est un point x tel que $x \in U(x)$.

Définition 1.6. Nous dirons qu'un sous-ensemble $\mathcal{S}$ d'un espace normé a la *propriété de Kakutani* si chaque K-application de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ a un point fixe.

Théorème 1.7. *Si $\mathcal{S}$ a la propriété de Kakutani alors toute rétraction $\mathcal{R}$ de $\mathcal{S}$ a la propriété de Kakutani.*

Démonstration. Soit r de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{S}$ l'application de rétraction associée. Soit U une K-application de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}$. Alors nous définissons une K-application V de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ par

$$V(x) = U(rx)$$

V a un point fixe y tel que $y \in U(ry) \subset \mathcal{R}$. Comme $y \in \mathcal{R}$, $y = ry$, et donc $y \in U(y)$. □

Théorème 1.8. *Si $\mathcal{S}$ a la propriété de Kakutani et est homéomorphe à $\mathcal{R}$, par rapport à une application linéaire, $\mathcal{R}$ a la propriété de Kakutani.*

Démonstration. Soit $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ l'homéomorphisme associé et $T : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$ une K-application. Alors φ o T o $\varphi^{-1} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ est une K-application. Comme $\mathcal{X}$ a la propriété de Kakutani, il existe $x \in \mathcal{X}$ tel que φ o $x \in T$ o $\varphi^{-1}(x) = x$; d'où $\varphi^{-1}(x) \in T\ o\ \varphi^{-1}(x)$. □

Théorème 1.9. *(Kakutani, 1941) Tout sous-ensemble convexe non-vide de $\mathbb{R}^m$ a la propriété de Kakutani.* [1]

Démonstration. Si le résultat est vrai pour les simplexes, le résultat général découlera du théorème 1.7. Supposons donc que $\mathcal{S}$ soit un r-simplexe fermé (simplexe à r sommets). Si $\epsilon_n > 0$, nous pouvons construire une subdivision de $\mathcal{S}$ en simplexes de taille maximale ϵ_n. Nous pouvons donc définir une application T_n de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ telle que :

1. $T_n(x_i^n) \in U(x_i^n)$ pour chaque sommet x_i^n de la subdivision ;
2. T_n soit affine sur chaque simplexe de la subdivision.

T_n est une application continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ et a un point fixe z_n d'après le théorème de Brouwer 1.1 : c'est-à-dire, $T_n z_n = z_n$.
Nous choisissons notre numérotation de telle manière que

$$z_n \in conv(x_0^n, x_1^n, ..., x_r^n).$$

Ainsi $z_n = \sum_{i=0}^{r} c_i^n x_i^n$ où $c_i^n \geq 0$ et $\sum_{i=0}^{r} c_i^n = 1$. Nous prendrons une suite $\epsilon_n \longrightarrow 0$. En nous mettant à chaque étape dans $conv(x_0^n, x_1^n, ..., x_r^n)$, nous pouvons supposer, sans perdre de généralités, que lorsque $n \longrightarrow \infty$ nous avons $z_n \longrightarrow z \in \mathcal{S}$, car $\mathcal{S}$ est fermé, tel que également $x_i^n \longrightarrow z$ pour $0 \leq i \leq r$. En extrayant une sous-suite par compacité, nous pouvons aussi supposer que pour chaque i $(0 \leq i \leq r)$, $T_n x_i^n$ converge, vers un certain y_i ; et que c_i^n converge vers un certain c_i. Clairement $c_i \geq\leq 0$ et $\sum_{i=0}^{r} c_i = 1$. Etant donné que $(x_i^n, T_n x_i^n)$ est dans $\mathcal{G}(U)$ et converge vers (z, y_i), ce point est dans $\mathcal{G}(U)$, i.e. $y_i \in U(z)$. Ainsi $z = \lim_{n \longrightarrow \infty} z_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} T_n z_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=0}^{r} c_i^n T_n x_i^n = \sum_{i=0}^{r} c_i y_i \in U(z)$, car $U(z)$ est convexe. □

1. Les normes étant équivalentes en dimensions finies, $\mathbb{R}^m$ peut être muni de n'importe quelle norme

1.3.3 Cube de Hilbert

Afin d'obtenir un résultat général, nous allons établir un théorème sur un espace particulier : le cube de Hilbert.

Lemme 1.1. *Soit $(\mathcal{U}, \rho)$ un espace métrique. Supposons que T est une application continue de (un sous-espace fermé de) $\mathcal{U}$ dans un sous-espace compact de $\mathcal{U}$ et que, pour tout $\epsilon>0$, il existe x_ϵ tel que*

$$\rho(Tx_\epsilon, x_\epsilon) < \epsilon. \tag{1.3.1}$$

Alors T admet un point fixe.

Démonstration. Soit T allant du sous-espace fermé $\mathcal{M}$ dans le sous-espace compact $\mathcal{L}$. Comme Tx_ϵ est dans $\mathcal{L}$, nous pouvons supposer, quitte à extraire une sous-suite par compacité, que pour toute suite $\epsilon_n \longrightarrow 0$, nous avons $Tx_{\epsilon_n} \longrightarrow y \in \mathcal{L}$. D'après (1.3.1), nous avons également $x(\epsilon_n) \longrightarrow y$ telle que $y \in \mathcal{M}$. Comme Ty est bien définie, car $y \in \mathcal{M}$ et

$$Ty = T(\lim_{n\longrightarrow\infty} x(\epsilon_n)) = \lim_{n\longrightarrow\infty} Tx(\epsilon_n) = y.$$

□

Lemme 1.2. *Soit $(\mathcal{Y}, \rho$ un espace métrique compact. Pour chaque $\epsilon > 0$, soit P_ϵ une application continue de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Y}$ telle que $\rho(P_\epsilon x, x) < \epsilon(\forall x)$. Supposons que tout ensemble $P_\epsilon\mathcal{Y}$ a la propriété du point fixe. Alors $\mathcal{Y}$ a la propriété du point fixe.*

Démonstration. Considérons une application continue T de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Y}$. Comme $P_\epsilon T$ va de $P_\epsilon\mathcal{Y}$ dans lui-même, il existe un point fixe x_ϵ ; d'où $P_\epsilon T x_\epsilon = x_\epsilon$.
Ainsi $\rho(x_\epsilon, Tx_\epsilon) = \rho(P_\epsilon Tx_\epsilon, Tx_\epsilon)$. D'après le lemme 1.1, T admet un point fixe. □

Théorème 1.10. *Le cube de Hilbert $\mathcal{H}_0$ a la propriété du point fixe.*

Démonstration. Nous remarquons que pour n assez grand,

$$\|P_n a - a\| \leq \left(\sum_{n+1}^{\infty} r^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon \tag{1.3.2}$$

pour tout a dans $\mathcal{H}_0$. Soit une suite $(a^i)_i$ bornée d'éléments de $\mathcal{H}_0$ et $\epsilon > 0$. Comme l^2 est réflexif, la limite faible a de cette suite existe. D'après (1.3.2), il existe N tel que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n^i - a_n|^2 = \|P_N(a^i - a)\|^2 < \epsilon \ \forall i$$

et il existe M tel que

$$|a_n^i - a_n|^2 < \epsilon \ \forall n < N, \forall i > M$$

D'où

$$\begin{aligned} \|a^i - a\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^i - a_n|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{N} |a_n^i - a_n|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n^i - a_n|^2 \\ &\leq (N+1)\epsilon, \ \forall i > M \end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathcal{H}_0$ est compact. Puisque $P_n\mathcal{H}_0$ peut être vu commme un sous-ensemble compact convexe de $\mathbb{R}^n$, le théorème de Brouwer 1.1 donne la propriété du point fixe pour $P_n\mathcal{H}_0$. Ainsi le lemme 1.2 montre que $\mathcal{H}_0$ a la propriété du point fixe. □

Théorème 1.11. *Le cube de Hilbert $\mathcal{H}_0$ a la propriété de Kakutani.*

Démonstration. Nous considérons les projections P_n dans l^2 : $P_n(x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...)$.
Le théorème découle de la compacité de $\mathcal{H}_0$ et (1.3.2) montrée dans le théorème 1.10 et du lemme suivant. □

Lemme 1.3. *Soit $\mathcal{X}$ un sous-ensemble compact convexe d'un espace normé. Supposons que pour n=1,2,... il existe une application linéaire continue P_n de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$ telle que*
(i) $\|P_n x - x\| < n^{-1}$ $(x \in \mathcal{X})$;
(ii) $P_n\mathcal{X}$ a la propriété de Kakutani.
Alors $\mathcal{X}$ a la propriété de Kakutani.

Démonstration. Soit U une K-application de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$. On remarque facilement que P_nU est une K-application de $P_n\mathcal{X}$ dans $P_n\mathcal{X}$. Ainsi, d'après (i) P_nU a un point fixe y_n dans $P_n\mathcal{X}$,

$$y_n \in P_nU(y_n).$$

Ainsi $y_n = P_n z_n$ avec $z_n \in U(y_n)$. Par compacité de $\mathcal{X}$, supposons (sans perdre de généralité) que $y_n \longrightarrow y \in \mathcal{X}$. Etant donné que $\|y_n - z_n\| = \|P_n z_n - z_n\| \longrightarrow 0$, nous voyons que $z_n \longrightarrow y$. Ainsi les points (y_n, z_n) dans $\mathcal{G}(U)$ convergent vers (y, y). Comme $\mathcal{G}(U)$ est fermé, (y, y) est dans $\mathcal{G}(U)$; d'où y est un point fixe pour U. □

1.3.4 Sous-espace fermé convexe d'un Banach à bords bornés

Maintenant que le cas du cube de Hilbert est résolu, nous pouvons démontrer le cas général en nous ramenant au cube de Hilbert.

Théorème 1.12. *Tout sous-ensemble compact convexe non-vide $\mathcal{X}$ d'un espace normé a la propriété de Kakutani.*

Démonstration. D'après le théoréme 1.4, $\mathcal{X}$ est homéomorphe, par rapport à une application linéaire, à un sous-ensemble compact convexe $\mathcal{Y}$ du cube de Hilbert $\mathcal{H}_0$. $\mathcal{Y}$ est une rétraction de $\mathcal{H}_0$. Comme $\mathcal{H}_\prime$ a la propriété de Kakutani, les théorèmes 1.7 et 1.8 montrent que $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}$ ont cette propriété. □

Théorème 1.13. *Soit $\mathcal{M}$ un sous-ensemble convexe compact d'un espace de Banach et soit T une K-application de $\mathcal{M}$ dans un sous-ensemble compact de $\mathcal{M}$. Alors T admet un point fixe.*

Démonstration. T donne une K-application de l'ensemble compact convexe $\emptyset \neq \bar{conv}(T\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ (la fermeture convexe de $T\mathcal{M}$) dans lui-même ; un point fixe existe d'après le théorème 1.12 □

Théorème 1.14. *Soit $\mathcal{M}$ un sous-ensemble convexe compact d'un espace de Banach $\mathcal{B}$, avec $\partial\mathcal{M}$ borné. Soit U une K-application de $\mathcal{M}$ dans un sous-ensemble compact de $\mathcal{B}$ tel que $U(x) \subset \mathcal{M}$ pour $x \in \partial\mathcal{M}$. Alors U admet un point fixe.*

Démonstration. Si l'intérieur $\mathcal{M}^0$ est vide, $\mathcal{M} = \partial\mathcal{M}$ et le théorème 1.13 donnent le résultat. Si $\mathcal{M}^0 \neq \emptyset$, supposons sans perdre de généralité que $0 \in \mathcal{M}^0$. Par hypothèse de compacité, l'image de U, $\cup_{x\in\mathcal{M}} U(x)$, est contenue dans $c\mathcal{M}$ pour un c ≥ 1. Soit ce c, et définissons une K-application V de $c\mathcal{M}$ dans $c\mathcal{M}$ par

$$V(x) = U(rx),$$

où r est le rayon de rétraction de $\mathcal{M}$ défini par

$$rx = x/\max(g(x),1) \text{ où } g(x) = \inf\{c : x \in c\mathcal{M}\}$$

Maintenant V admet un point fixe z d'après le théorème 1.13. Si nous avons $z \notin \mathcal{M}$ cela donne $rz \in \partial\mathcal{M}$ et $V(z) = U(rz) \subset \mathcal{M}$ par hypothèse sur U ; on a $z \in V(z) \subseteq \mathcal{M}$; ainsi z ne peut pas être un point fixe. Ainsi le point fixe z est dans $\mathcal{M}$ et donc

$$z \in V(z) = U(z).$$

□

1.4 Théorème de Lax-Milgram

Avec la formule de Green et l'inégalité de Poincaré, le théorème de Lax-Milgram peut être vu comme la clef de voûte de l'étude variationnielle des équations aux dérivées partielles. Nous comprendrons précisément pourquoi dans l'exemple qui suivra.

1.4.1 Cas non-symétrique

La première partie de Lax-Milgram montre que la formulation variationnelle (1.4.1) admet une unique solution. Elle ressemble au théorème de Riesz à la différence près que la forme bilinéaire n'est pas symétrique définie positive, mais par contre coercive (ou elliptique).

Définition 1.7. Soit $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert réel et $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire sur V. On dit que a est coercive (ou elliptique) s'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$a(v, v) \geq \lambda \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

Théorème 1.15. *Soit $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert réel, $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V, $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue coercive sur V. Alors la formulation variationnelle*

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que} \quad a(u, v) = L(v) \;\; \forall\, v \in V \tag{1.4.1}$$

admet une unique solution.
De plus, cette solution dépend continûment de la forme linéaire L.

Démonstration. Comme a est continue, il existe $M{>}0$ tel que pour tout $v, w \in V$

$$\|a(w, v)\|_V \;\leq\; M \|w\|_V \|w\|_V .$$

Soit $w \in V$, pour tout $v \in V$

$$\|a(w, v)\|_V \;\leq\; N \|v\|_V \text{ où } N = M \|w\|_V.$$

Donc, pour tout $w \in V$, l'application $v \to a(w, v)$ est une forme linéaire continue sur V : par conséquent, le théorème de représentation de Riesz entraîne qu'il existe un élément de V, noté $A(w)$, tel que

$$a(w, v) = \langle A(w), v\rangle \text{ pour tout } v \in V.$$

Par ailleurs, par bilinéarité de a, on a pour tout $w, w' \in V$,

$$\langle A(w) + \mu A(w'), v\rangle = a(w, v) + \mu a(w, v) = a(w + \mu w, v) = \langle A(w + \mu w'), v\rangle \quad \forall v \in V.$$

Ce qui implique la linéarité de l'application $w \to A(w)$. De plus, en prenant $v = A(w)$, d'après la continuité de a,

$$\|A(w)\|_V{}^2 = a(w, A(w)) \;\leq\; M\,\|w\|_V\,\|A(w)\|_V\,,$$

c'est-à-dire que $\|A(w)\|_V \;\leq\; M\,\|w\|_V$ et donc $w \longrightarrow A(w)$ est continue. Le théoréme de représentation de Riesz implique également qu'il existe un élément de V, noté f, tel que $\|f\|_V = \|L\|_{V'}$ et

$$L(v) = \langle f, v\rangle \text{ pour tout } v \in V.$$

Finalement, le problème variationnel (1.4.1) est équivalent à :

$$\textit{trouver } w \in V \textit{ tel que } A(w) = f$$

Pour démontrer le théorème, il nous faut donc montrer que l'opérateur A est bijectif de V dans V (ce qui implique l'existence et l'unicité de u) et que son inverse est continu (ce qui prouve la dépendance continue de u par rapport à L). A l'aide de la coercivité de a et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on montre que

$$\lambda\|w\|_V{}^2 \leq a(w, w) = \langle A(w), w\rangle \leq \|A(w)\|_V\,\|w\|_V\,,$$

ce qui donne

$$\lambda\,\|w\|_V \leq \|A(w)\|_V \quad \forall w \in V, \tag{1.4.2}$$

c'est-à-dire que A est injectif. Pour montrer que A est surjectif, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(A){=}V$ (ce qui n'est pas évident si V est de dimension infinie), il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(A)$ est fermé dans V est que $\mathrm{Im}(A)^\perp = \{0\}$. En effet, dans ce cas on voit que $V = \{0\}^\perp = (\mathrm{Im}(A)^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(A)}$ $=\mathrm{Im}(A)$, ce qui prouve bien que A est surjectif. Soit $A(w_n)$ une suite dans $\mathrm{Im}(A)$ qui converge vers b dans V. En vertu de (1.4.2) on a

$$\lambda\,\|w_n - w_p\|_V \leq \|A(w_n) - A(w_p)\|_V$$

qui tend vers zéro quand n et p tendent vers l'infini. Donc w_n est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert V, c'est-à-dire qu'elle converge vers une limite $w \in V$. Alors, par continuité de A, on en déduit que $A(w_n)$ converge vers $A(w) = b$, c'est-à-dire que $b \in \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ est donc fermé. D'autre part, soit $v \in \mathrm{Im}(A)^\perp$; la coercivité de a implique

$$\lambda\|v\|_V{}^2 \leq a(v, v) = \langle A(v), v\rangle = 0,$$

c'est-à-dire que $v = 0$ et $\mathrm{Im}(A)^\perp = \{0\}$, ce qui prouve que A est bijectif. Soit A^{-1} son inverse : l'inégalité (1.4.2) avec $w = A^{-1}(v)$ prouve que A^{-1} est continu, donc la solution u dépend continûment de f. □

1.4.2 Cas symétrique

Cette deuxième partie du théorème de Lax-Milgram suppose de plus que la forme bilinéaire est symétrique afin de donner une équivalence entre la formulation variationnelle (1.4.1) et un problème de minimisation.

Proposition 1.1. *On se place sous les hypothèses du théorème 1.15 de Lax-Milgram. On suppose en plus que la forme bilinéaire est symétrique a(w,v) = a(v,w) pour tout $v, w \in V$. Soit J(v) l'énergie définie pour $v \in V$ par*

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v).$$

Soit $u \in V$ la solution unique de la formulation variationnelle (1.4.1). Alors u est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Réciproquement, si $u \in V$ est un point minimum de l'énergie J(v), alors u est la solution unique de la formulation variationnelle (1.4.1).

Démonstration. Si u est solution de la formulation variationnelle (1.4.1), on développe (grâce à la symétrie de a)

$$\begin{array}{rcl} J(u+v) & = & \frac{1}{2}a(u+v, u+v) - L(u+v) \\ & = & J(u) + \frac{1}{2}a(v, v) + a(u, v) - L(v) \\ & = & J(u) + \frac{1}{2}a(v, v) \geq J(u). \end{array}$$

Comme $u + v$ est quelconque dans V, u minimise bien l'énergie J dans V. Réciproquement, soit $u \in V$ tel que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Pour $v \in V$, on définit une fonction $j(t) = J(u + tv)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (il s'agit d'un polynôme du deuxième degré en t). Comme $t = 0$ est un minimum de j, on en déduit que $j'(0) = 0$.
Or $J(u+tv) = \frac{1}{2}a(u+tv, u+tv)+L(u+tv) = J(u)+ta(u, v)-tL(v)+\frac{1}{2}t^2a(v, v)$.
D'où $\frac{1}{2}a(u, v)-L(v) = j'(0) = 0$ qui est exactement la formulation variationnelle (1.4.1). □

1.4.3 Exemple

L'étude d'un exemple simple va nous aider à bien comprendre en quoi le théorème de Lax-Milgram est important dans les équations aux dérivées partielles.

Commençons par rappeler la formule de Green et l'inégalité de Poincaré dont nous aurons besoin par la suite :

Théorème 1.16. *(Formule de Green) Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^2$. Si $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^2(\Omega)$, on a :*

$$\int_\Omega \Delta u v dx \;=\; -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dx$$

où n=$(n_i)_{1\leq i\leq n}$ est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$.

Lemme 1.4. *(Inégalité de Poincaré) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante C>0 telle que, pour toute fonction $v \in C^1(\overline{\Omega})$ qui s'annule sur le bord $\partial\Omega$,*

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx$$

Considérons maintenant le problème aux limites suivant :

$$\text{(1.4.3)} \qquad \text{trouver u } \in H^2(\Omega) \text{ tel que } \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta & = & f, \text{ dans } \Omega \\ u & = & 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

où Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ est la frontière de Ω, f une fonction de $L^2(\Omega)$.
Si on multiplie (1.4.3) par $v \in H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ et si on intègre sur Ω, on obtient à l'aide de la formule de Green :

$$\int_\Omega f v dx \;=\; -\int_\Omega \Delta u v dx \;=\; \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dx$$

Comme u satisfait les conditions aux limites de Dirichlet, $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on a le problème variationnel suivant :

$$\text{(1.4.4)} \qquad \text{trouver u } \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \quad a(u,v) \;=\; L(v) \quad \forall\, v \in H_1^0$$

où a(u,v)=$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ et L(v)=$\int_\Omega f v dx$.
On vérifie le cahier des charges :

- $V = H_0^1$ est un espace de Hilbert
- a est bilinéaire continue sur V et L linéaire continue sur V
- a est coercive d'après l'inégalité de Poincaré

On peut appliquer le théorème de Lax-Milgram : il existe une unique solution au problème variationnel (1.4.4).

Remarque 1.2. Une solution du problème aux limites est une solution du problème variationnel, appelée solution faible, par contre la réciproque n'est pas forcément vraie. Dans cette formulation, le problème est bien posé, c'est-à-dire qu'il existe une unique solution, ce qui est bien plus pratique. Dans notre exemple, on a même équivalence, mais il reste encore un peu de travail.

CHAPITRE 2

QUELQUES CONCEPTS DE LA THÉORIE DU CONTRÔLE

En général, pour contrôler un système d'équations, on part d'un système admettant une unique solution sur lequel on a le choix d'un des paramètres que l'on appelera contrôle. Le système devient ainsi sur-déterminé et on essayera, dans la mesure du possible, de trouver le contrôle qui nous permettra, par exemple, d'atteindre une cible ou encore d'optimiser une donnée.

Sommaire

2.1 Cadre

La contrôlabilité qui nous intéresse est l'étude des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques (dépendant du temps noté t) sur lesquels on agit à l'aide d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial (à l'instant initial $t = t_0$) à un certain état final ou à un état proche de celui-ci (à un instant $t = T$). Pour fixer les idées, nous allons donner un cadre, bien qu'il en existe d'autres.

Le système que nous allons considérer est composé tout d'abord d'une équation d'état, qui, dans notre exemple, sera

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y = \mathcal{B}v \tag{2.1.1}$$

où y est une fonction vectorielle appartenant à un espace H appelé "espace d'état", $\mathcal{A}$ un opérateur aux dérivées partielles linéaire ou non-linéaire, v le contrôle tel que $v(t) \in V$ pour tout $t \in [0, T]$ et $\mathcal{B}$ une application définie sur l'espace appelé "espace de contrôle" dans l'espace d'état. Les espaces d'état et de contrôle sont des ensembles de fonctions vectorielles définies sur $\Omega \times (t_0, T) \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

En général, on ne peut contrôler le système que sur une petite partie de Ω. L'opérateur $\mathcal{B}$ contient donc souvent une fonction indicatrice sur $\omega \subseteq \Omega$. Dans ce cas, nous pouvons déjà distinguer deux types de contrôle suivant si ω est un ouvert de Ω ou de $\Gamma = \partial\Omega$ (la frontière de Ω). Il existe des possibilités de passer de l'un à l'autre. Du point de vue physique, si l'on s'intéresse à un corps matériel, cela revient à agir depuis l'intérieur ou sur la surface extérieure de ce corps.

Quitte à effectuer un changement de variable ($t \to t - t_0$), on peut supposer que $t_0 = 0$. A notre équation d'état est ajoutée une condition initiale qui est donnée par

$$y_{|t=0} = y_0 \tag{2.1.2}$$

où y_0 est un élément de l'espace d'état.

Quitte à rajouter des conditions aux bords, nous supposerons que, pour v donné, le problème

$$\text{trouver } y \text{ solution de (2.1.1), (2.1.2)}$$

est bien posé au sens d'Hadamard, c'est-à-dire qu'il existe une solution, qu'elle est unique et qu'elle dépend de façon continue des données dans le cadre d ?une topologie raisonnable. On notera cette solution $y(v) : (x, t) \mapsto y(x, t; v)$ et on définit $y(t; v) : x \mapsto y(x, t; v)$.

2.2 Contrôle exact, approché et aux trajectoires (ou à zéro)

Nous pouvons maintenant définir la notion de contrôlabilité. Commençons par la contrôlabilité exacte :
Soit T>0.

Définition 2.1. Le système (2.1.1)-(2.1.2) est dit *exactement contrôlable* au temps T si pour toutes fonctions $y_T \in H$ et $y_0 \in H$, il existe un contrôle $v \in U$ tel que

$$y(T; v) = y_T.$$

Il arrive souvent qu'un système ne soit pas exactement contrôlable, et du point de vue physique, il est seulement nécessaire que l'on soit proche de la fonction cible y_T. C'est pourquoi nous introduisons la notion de contrôle approché :

Définition 2.2. Le système (2.1.1)-(2.1.2) est dit *approximativement contrôlable* si pour toute fonction $y_T \in H$, il existe un contrôle $v \in U$ tel que

$y(T; v)$ appartient à un voisinage de y_T arbitrairement petit.

Définition 2.3. Le système (2.1.1)-(2.1.2) est dit *contrôlable aux trajectoires* si pour tout temps T et si pour toute fonction $y_0 \in H$, il existe un contrôle $v \in U$ tel que

$$y(T; v) = y^*(T; v^*)$$

où y^* est une solution donnée du système (2.1.1), (2.1.2) associée à $y_0^* \in H$ et $v^* \in U$. En d'autres termes, il sera *contrôlable aux trajectoires* si l'on connait un certain contrôle qui permet d'aller d'un état initial à un état final, et si pour tout autre état initial on sait trouver le contrôle permettant d'atteindre le même état final.

Remarque 2.1. Dans le cas linéaire, la contrôlabilité aux trajectoires est équivalente à la contrôlabilité à zéro, c'est-à-dire la contrôlabilité exacte avec $y_0 = 0$.

CHAPITRE 3

CONTRÔLE DES ÉQUATIONS DE DIFFUSION LINÉAIRES

Ce chapitre sera consacré à l'étude de la contrôlabilité du problème suivant :

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y = v\mathbb{1}_{\omega\times(0,T)}, \quad \textit{sur } Q_T = \Omega \times (0,T) \tag{3.0.1}$$

$$y = 0, \quad \textit{sur } \Sigma_T = \Gamma \times (0,T) \tag{3.0.2}$$

$$y(0) = y_0, \tag{3.0.3}$$

où Ω est un ensemble ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, d $\in \mathbb{N}^*$, ω un sous-ensemble ouvert de Ω, Γ la frontière de Ω, $\mathbb{1}_{\omega\times(0,T)}$ est la fonction caractéristique sur $\omega_T = \omega \times (0,T)$ et $\mathcal{A}$ est un opérateur elliptique du second ordre, et v le contrôle de notre système.

Les solutions y cherchées vivront dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, la dérivée en temps de y sera considérée comme élément de $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, nous prendrons notre contrôle v dans $L^2((0,T)\times\Omega) \equiv L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et enfin l'opérateur différentiel $\mathcal{A}$ ira de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ (dual de $H_0^1(\Omega)$).

Sommaire

Remarque 3.1. Pour bien comprendre qu'il y a égalité dans (3.0.1), tout d'abord, grâce au théorème de Riesz on voit $v\mathbb{1}_{\omega\times(0,T)}$ comme $\left\langle v\mathbb{1}_{\omega\times(0,T)},\cdot\right\rangle_{L^2(\Omega)}$ élément de $L^2(\Omega)' = L^2(\Omega)$ et ensuite il faut faire pivoter $H_0^1(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire que l'on identifie $L^2(\Omega)$ à son dual, puisque c'est un espace de Hilbert ; on considère les injections continues suivantes :

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

et chaque élément y de $H_0^1(\Omega)$ est vu comme $\langle y,\cdot\rangle_{L^2(\Omega)}$ élément de $H^{-1}(\Omega)$.

Remarque 3.2. Afin d'effectuer une intégration par partie en espace à l'aide de la formule de Green, il sera nécessaire de supposer que la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de Ω est suffisamment régulière. De plus, pour obtenir certaines majorations par la suite, nous supposerons que l'opérateur $\mathcal{A}$ est linéaire, continu de $H^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ et qu'il satisfait la propriété d'ellipticité suivante :

$$\langle \mathcal{A}\phi, \phi\rangle \geq \alpha \left\|\phi\right\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \quad \phi \quad \in H_0^1(\Omega)$$

Exemple 3.1. Si l'on considère des fonctions réelles $a_{ij}(x,t)$ vérifiant la condition :

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \delta(x,t)|\xi|^2, \delta(x,t) > 0.$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ peut être de la forme :

$$\mathcal{A} = -\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x,t),$$

où $b_i,\ c \in L^\infty(Q_T)$ et $a_{i,j} \in L^2(0,T;W^{1,\,\infty}(\Omega))$ avec $W^{1,\,\infty}(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega), u' \in L^\infty(\Omega)\}$.
ou encore :

$$\mathcal{A} = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x,t),$$

où $a_{ij},\ b_i,\ c \in L^\infty(Q_T)$.

Remarque 3.3. Bien évidemment, on peut se poser la question de la contrôlabilité d'un système seulement une fois que l'on sait le résoudre, ce dont on discutera par la suite.

3.1 Optimisation

Une fois que l'on sait que le système (2.1.1), (2.1.2) est contrôlable, le travail est loin d'être terminé, puisque dans la pratique il n'est pas suffisant de savoir qu'il existe un contrôle afin de minimiser le coût de ce contrôle.
Cette minimisation dépendra du modèle physique étudié.

Exemple 3.2. Notons $B_\epsilon(y_T) = \{y \in U | \|y - y_T\|_U < \epsilon\}$.

(i) Si l'espace de contrôle U est $L^2(\Omega \times (0,T))$, on peut avoir le problème de minimisation suivant :

$$\inf_{v \in U} \frac{1}{2} \|v\|_U^2 = \inf_{v \in U} \frac{1}{2} \iint_{\Omega \times (0,T)} v^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t, \qquad y(T;v) \in B_\epsilon(y_T),$$

(ii) ou encore si $U = L^\infty(\Omega \times (0,T))$,

$$\inf_{v \in U} \|v\|_U = \inf_{v \in U} \sup_{(x,t) \in \Omega \times (0,T)} v(x,t), \qquad y(T;v) \in B_\epsilon(y_T).$$

3.2 Problème direct dans un cadre général

Dans cette partie nous démontrerons l'existence et l'unicité du problème directe dans un cadre général en se basant sur celle de Dautray et J.-L. Lions dans *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Tome 8 Evolutions : semi-groupe, variationnel.*

Soit V (resp. H) un espace de Hilbert séparable dont le produit scalaire est noté $((\cdot,\cdot))$ (resp. $(\cdot,\cdot)$) et la norme notée $\|\cdot\|$ (resp. $|\cdot|$). On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité sur V.

On suppose que V est dense dans H, et l'on identifie H et son dual H', ce qui est possible grâce au théorème de Riesz, et on a :

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V' \quad (\hookrightarrow \text{ injections continues})$$

chaque espace étant dense dans le suivant.

Remarque 3.4. Ces inclusions nous permettent de voir chaque élément de V comme un élément de V' à l'aide du produit scalaire de H. On dit que l'on fait pivoter V sur H, ce qui a pour effet d'utiliser le produit scalaire de H au lieu de celui de V.

Exemple 3.3. Prenons par exemple, $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $V' = H^{-1}(\Omega)$ (Ω un ensemble ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$). Alors pour montrer qu'un élément de $H_0^1(\Omega)$ est nul, on montre que le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ de cet élément avec tous les éléments de $H_0^1(\Omega)$ est nul, et on conclut par densité.

3.2.1 Préliminaires

Avant tout, nous introduirons l'espace sur lequel nous travaillerons et adopterons quelques-unes de ses propriétés utiles que nous admettrons par la suite. Dans cette partie nous baserons sur

Définition 3.1. Soit $0 < T < \infty$.
On note $\mathcal{D}(]0,T[)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclus dans]0,T[.
On désigne par $W(0,T;V,V')$ l'espace :

$$W(0,T;V,V') = \{u \in L^2(0,T;V); u' \in L^2(0,T;V')\}$$

Remarque 3.5. On prend u' au sens des distributions vectorielles et en voyant u' comme une forme linéaire de V' à l'aide du produit scalaire de H.

Remarque 3.6. Il est important de garder à l'esprit que les intégrales que nous rencontrons sont des intégrales vectorielles, c'est-à-dire des intégrales de Bochner dont voici la définition :

Définition 3.2. Soit B un espace de Banach. Une fonction $f : (0,T) \to B$ est dans $L^2(0,T;B)$ au sens de l'intégrale de Bochner si il existe une suite de fonctions

$$\begin{array}{rcl} s_k : (0,T) & \to & B \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{N_k} \mathbb{1}_{A_{i,k}} b_{i,k} \end{array}$$

où les A_{ik} sont des boréliens, les N_k sont des entiers naturels et les $b_{ik} \in B$, telle que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T \|f - s_k\|_B^2 \, \mathrm{d}\lambda = 0$$

où λ est le mesure de Lebesgue.

Proposition 3.1. *L'espace $W(0,T;V,V')$ muni de la norme*

$$\|u\|_W = \left(\|u\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|u'\|^2_{L^2(0,T;V')}\right)^{1/2}$$

est un espace de Hilbert.

Démonstration. Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $W(0,T;V,V')$, alors $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{u'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement des suites de Cauchy dans $L^2(0,T;V)$ et $L^2(0,T;V')$ qui sont des espaces complets. Il existe donc $u \in L^2(0,T;V)$ et $u_1 \in L^2(0,T;V')$ tel que

$$\text{(i) } u_n \to u \text{ dans } L^2(0,T;V),$$
$$\text{(ii) } u_n' \to u_1 \text{ dans } L^2(0,T;V').$$

D'après (i), on a

$$\int_0^T u_n \varphi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^T u\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)$$

c'est-à-dire $u_n \to u$ dans $\mathcal{D}'(]0,T[;V)$, ce qui implique que

$$(\int_0^T u_n\varphi, v) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (\int_0^T u\varphi, v) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)\ \forall v \in V$$

Comme les dérivées des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact ont leur dérivée également de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact

$$(\int_0^T u_n\varphi', v) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (\int_0^T u\varphi', v) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)\ \forall v \in V$$

D'où, d'après la définition de la dérivée au sens des distributions,

$$(\int_0^T u_n'\varphi, v) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (\int_0^T u'\varphi, v) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)\ \forall v \in V$$

c'est-à-dire que $u_n' \to u'$ dans $\mathcal{D}'(]0,T[;V')$.
D'après (ii) $u_n' \to u_1$ dans $\mathcal{D}'(]0,T[;V')$ et donc $u' = u_1$ par unicité de la limite. □

Théorème 3.1. *Tout $u \in W(0,T;V,V')$ est presque partout égal à une fonction continue de $[0,T]$ dans H. De plus, on a*

$$W(0,T;V,V') \hookrightarrow \mathcal{C}^0([0,T];H),$$

l'espace $\mathcal{C}^0([0,T];H)$ étant muni de la norme de la convergence uniforme.

Théorème 3.2. *(Formule de Green ou plus simplement d'intégration par parties)*
Soient $u, v \in W(0,T;V,V')$ alors

$$\int_0^T \langle u'(t), v(t)\rangle\,\mathrm{d}t + \int_0^T \langle v'(t), u(t)\rangle\,\mathrm{d}t = (u(T),v(T)) - (u(0),v(0)).$$

Proposition 3.2. *Pour $u \in W(0,T;V,V')$, $v \in V$, on a*

$$\langle u'(\cdot), v\rangle = \frac{d}{dt}(u(\cdot),v) \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,\mathrm{T}[).$$

3.2.2 Problème exact

Pour chaque $t \in [0, T]$, on se donne une forme bilinéaire $a(\cdot; \cdot, \cdot)$ sur $V \times V$, et l'on fait l'hypothèse :

$$\begin{cases} \text{pour tout } u, v \in V, \text{ la fonction } t \to a(t; u, v) \text{ est mesurable} \\ \text{et il existe une constante } M = M(T) > 0 \\ \text{(indepéndante de } t \in (0, T),\ u, v \in V) \\ \text{telle que} \\ |a(t; u, v)| \leq M \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V \end{cases}$$

Il en résulte que, pour chaque $t \in [0, T]$, la forme bilinéaire $a(t, u, v)$ définit un opérateur $A(t)$ linéaire continu de V dans V' tel que

$$\begin{cases} a(t; u, v) = (A(t)u, v),\ \forall t \in [0, T], \text{ dont le domaine est} \\ D(A(t)) = \{u \in V; v \to a(t; u, v) \text{ est continu sur } V \text{ pour la topologie de } H\}, \\ \sup\limits_{t \in [0,T]} \|A(t)\|_{\mathcal{L}(V, V')} \leq M. \end{cases}$$

De plus, on fera l'hypothèse de coercivité sur V par rapport à H suivante

$$\begin{cases} \text{il existe } \lambda,\ \alpha\ \in \mathbb{R},\ \alpha > 0 \text{ telles que} \\ a(t; u, u) + \lambda |u|^2 \geq \alpha \|u\|^2, \ \forall t \in [0, T],\ \forall u \in V. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

On se donne u_0 et f vérifiant

$$u_0 \in H,\ f \in L^2(0, T; V'). \tag{3.2.2}$$

On considère le problème (P) suivant :

Trouver u vérifiant :

$$u \in W(0, T; V, V') \tag{3.2.3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u(\cdot), v) + a(\cdot; u(\cdot), v) = (f(\cdot), v) \\ \text{au sens de } \mathcal{D}'(]0, T[) \text{ pour tout } v \in V, \end{cases} \tag{3.2.4}$$

$$u(0) = u_0. \tag{3.2.5}$$

Remarque 3.7.
- C'est le choix de f qui nous impose l'espace où chercher les solutions u.
- Comme $W(0, T; V, V') \hookrightarrow \mathcal{C}^0([0, T]; H)$, alors la condition initiale (3.2.5) a bien un sens.
- On note que, d'après la proposition 3.2,

$$\frac{d}{dt}(u(\cdot), v) = (\frac{d}{dt}u(\cdot), v) \quad \forall v \in V.$$

3.2.3 Réductions

Si l'on pose $u = we^{kt}$, $k \in \mathbb{R}$, w vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} (\frac{dw}{dt}(\cdot), v) + a(\cdot; w(\cdot), v) + k(w(\cdot), v) = (e^{-kt} f(\cdot), v) \\ w(0) = u_0 \end{array} \right.$$

si bien que quitte à choisir ue^{kt} à la place de u dans (3.2.4) et en prenant $k = -\lambda$ dans (3.2.1), on peut remplacer (3.2.1) par

$$a(t; u, u) \geq \alpha \|u\|^2, \ \forall t \in [0, T], \ \forall u \in V. \tag{3.2.6}$$

Nous ferons cette hypothèse dans la suite.
On remarquera également, que grâce à (3.2), (3.2.4) est équivalente à

$$\frac{d}{dt} u(\cdot) + A(\cdot) u(\cdot) = f(\cdot) \text{ au sens de } L^2(0, T; V').$$

3.2.4 Plan de la démonstration

Cette démonstration, appelée *méthode de Galerkin*, a deux grands atouts, d'une part la démarche peut être calquée sur beaucoup d'autres problèmes similaires, et d'autre part, pour trouver la solution approchée, il n'y a plus qu'à appliquer la méthode des éléments finis, le chemin étant déjà tout tracé.

1. **Unicité de la solution du problème (P)**
2. **Existence d'une solution du problème (P)**
   (a) **Etape 1 : Résolution du problème approché**
   On résout le problème sur des sous-espaces de dimension finie (qui convergent en un sens à préciser vers notre espace), ce qui correspond, au niveau numérique, à résoudre un sytème matriciel.
   (b) **Etape 2 : Estimation**
   On montre que ces solutions sont uniformément bornées.
   (c) **Etape 3 : Passage à la limite faiblement**
   Ces solutions étant bornées, on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente vers une certaine fonction u.
   (d) **Etape 4 : la limite u est solution de (P)**
   On vérifie que u est solution du problème (P), et on peut en conclure que la suite entière converge vers u.
   (e) **Etape 5 : Convergence forte**

3.2.5 Unicité de la solution du problème (P)

Pour une démonstration d'unicité et d'existence, la partie unicité (injectivité) est la plupart du temps plus facile puisqu'il suffit de comparer deux solutions (surjectivité), et ainsi on peut se plonger délicatement dans les notations.

Théorème 3.3. *Si u_0 et f vérifient (3.2.2), alors la solution du problème (P), si elle existe, est unique.*

Démonstration. Soient u_1, u_2 deux solutions distinctes du problème (P), alors $w = u_1 - u_2$ vérifie $w \in W(V)$ et

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(\cdot, v) + a(\cdot; w(\cdot), v) = 0, \ \forall v \in V, \\ w(0) = 0 \end{cases}$$

Alors en remplaçant v par $w(t)$ dans l'équation ci-dessus et en intégrant de 0 à t :

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 + \int_0^t a(s; w(s), w(s))\mathrm{d}s = 0$$

Par coercivité de a, on a

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 \leqslant 0 \Rightarrow w(t) = 0 \ \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

D'où l'unicité dans le problème (P).

□

3.2.6 Existence d'une solution du problème (P)

Théorème 3.4. *Si u_0 et f vérifient (3.2.2), alors il existe une solution du problème (P) et*

$$u \in W(0, T; V, V').$$

Nous allons travailler dans des sous-espaces de dimension finie, et ensuite on passera à la limite sur la dimension.

Définition 3.3. Soit $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'espaces vectoriels de dimension finie. On dit que $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de Galerkin de l'espace vectoriel V si elle vérifie les axiomes suivants :

(i) $V_m \subset V$

(ii) $V_m \to V$ quand $m \to +\infty$ au sens suivant :

il existe $\mathcal{V}$ sous-espace dense de V, tel que, pour tout $v \in \mathcal{V}$, on peut trouver une suite $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant :

pour tout m, $v_m \in V_m$ et $v_m \to v$ dans V lorsque $m \to +\infty$. L'espace V_m s'appelle une approximation de Galerkin d'ordre m ($m \neq \dim V_m$) de V.

Remarque 3.8. Nous avons besoin de la séparabilité de V lorsque pour tout $v \in V$, on peut trouver $v_m \to v$ dans V.

Etape 1 : Résolution du problème approché

Soit $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ une approximation de Galerkin de V ; V étant dense dans H et d'après (3.3), pour $u_0 \in H$, il existe une suite $\{u_{0m}\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall m,\ u_{0m} \in V_m \textit{ et } u_{0m} \to u_0 \text{ dans } H.$$

Nous noterons

$$d_m = \dim V_m,\ \{W_{jm}\}_{j=1,\dots,d_m},\ \text{une base de } V_m.$$

Le problème est alors :
PROBLÈME (P_m)

$$\text{Trouver}\ \ u_m(t) = \sum_{j=1}^{d_m} g_{jm}(t) w_{jm}$$

(3.2.7)

$$\text{tel que :}\ \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{\mathrm{d}u_m(t)}{\mathrm{d}t}, w_{jm}\right) + a\left(t; u_m(t), w_{jm}\right) = \left(f(t), w_{jm}\right),\ 1 \leq j \leq d_m \\ u_m(0) = u_{0m} \end{array}\right.$$

Le système (3.2.7) est équivalent à un système différentiel d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^d$ du type

$$\left\{\begin{array}{l} B_m \dfrac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}_m(t) g_m = \gamma_m \\ g_m(0) = g_{0m} \end{array}\right. \tag{3.2.8}$$

où B_m et $\mathcal{A}_m(t)$ sont des matrices carrées de taille d_m dont les éléments sont β_{ijm}, $\alpha_{ijm}(t)$ respectivement définis par

$$\beta_{ijm} = (w_{im}, w_{jm}),\ \ , \alpha_{ijm}(t) = a(t; w_{im}, W_{jm}),\ i,j = 1, ..., d_m.$$

On note que les w_{jm} sont linéairement indépendants, c'est-à-dire que le déterminant de B_m est non nul, puisque les w_{jm} forment une base de v_m. Ainsi, à l'aide du théorème de Cauchy Lipschitz, on obtient le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Il existe une unique solution u_m au problème (P_m) vérifiant :*

$$u_m \in \mathcal{C}^0([0,T]; V_m),\ u'_m \in L^2([0,T]; V_m).$$

Remarque 3.9. Du point de vue numérique, il ne reste plus qu'à effectuer une discrétisation en temps, et nous avons la résolution du problème approché (P_m).

Etape 2 : Estimation

On multiplie l'équation (3.2.7) par $g_{jm}(t)$ et l'on somme de 1 à d_m ; il vient

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|u_m(t)\right|^2 + a(t; u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m(t)); \tag{3.2.9}$$

d'où par intégration entre (0,t) :

$$\frac{1}{2}\left|u_m(t)\right|^2 + \int_0^t a(s; u_m(s), u_m(s))\mathrm{d}s = \int_0^t (f(s), u_m(s))\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\left|u_{0m}\right|^2;$$

utilisant l'inégalité de coercivité (3.2.6) et en appliquant Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\frac{1}{2}\left|u_m(t)\right|^2 + \alpha\int_0^t \left\|u_m(s)\right\|^2 \mathrm{d}s \leq \int_0^t \left\|f(s)\right\| \left\|u_m(s)\right\| \mathrm{d}s + \frac{1}{2}\left|u_{0m}\right|^2; \tag{3.2.10}$$

D'une part, il existe $C(u_0)$ indépendant de m tel que

$$|u_{om}| \leq C(u_0)|u_o| \tag{3.2.11}$$

Et d'autre part, d'après la formule "$ab \leqslant \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2\ \forall a, b \in \mathbb{R}$" très utile pour les estimations,

$$\int_0^t \left\|f(s)\right\| \left\|u_m(s)\right\| \mathrm{d}s \leq \frac{\alpha}{2}\int_0^t \left\|u_m(s)\right\|^2 \mathrm{d}s + \frac{1}{2\alpha}\int_0^t \left\|f(s)\right\|^2 \mathrm{d}s. \tag{3.2.12}$$

On en déduit de (3.2.10), (3.2.11) et (3.2.12)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left|u_m(t)\right|^2 + \dfrac{\alpha}{2}\displaystyle\int_0^t \left\|u_m(s)\right\|^2 \mathrm{d}s \leq C_2(u_0)\left[|u_o|^2 + \displaystyle\int_0^t \left\|f(s)\right\|^2 \mathrm{d}s\right] \\ t \in [0,T], C_2(u_0) \text{ constante convenable, indépendante de } t,\ m \end{cases}$$

d'où le

Lemme 3.2. *Les fonctions u_m solutions de P_m restent dans un borné de $L^\infty(0,T;H)$ et de $L^2(0,T;V)$.*

Etape 3 : Passage à la limite faiblement

En utilisant les propriétés de compacité faible (ou faible étoile) des boules unités des espaces $L^2(V)$, $L^\infty(H)$, $L^2(V')$, et la continuité de $A(\cdot)$, on a le

Lemme 3.3. *On peut extraire de la suite $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}*}$ une sous-suite $\{u_{m'}\}$ possédant les propriétés suivantes :*

$$\begin{cases} i)\ u_{m'} \to u \text{ dans } L^2(V) \text{ faible,} \\ ii)\ u_{m'} \to u \text{ dans } L^\infty(H) \text{ faible} - *, \\ iii)\ A(\cdot)u_m \to A(\cdot)u \text{ dans } L^2(V') \text{ faible.} \end{cases}$$

Remarque 3.10.
- Pour avoir la même sous-suite dans *i)* et *ii)* il suffit d'extraire dans *ii)* une sous-suite de celle de *i)*.
- Il n'est pas totalement immédiat que la suite $u_{m'}$ converge dans *i)* et *ii)* vers la même limite. La convergence faible dans *i)* équivaut à la convergence faible-$*$.
  On a donc :
  $$\begin{cases} u_{m'} \to u \text{ dans } L^2(V) \text{ faible} - * \\ u_{m'} \to u_1 \text{ dans } L^\infty(H) \text{ faible} - * \end{cases}$$
  D'où
  $$\begin{cases} < u_{m'} - u, v > \to 0 \quad \forall v \in L^2(V) \\ < u_{m'} - u_1, v > \to 0 \quad \forall v \in L^\infty(H) \end{cases}$$
  Soit $v \in L^2(V) \subset L^\infty(H)$
  $$< u_1 - u, v > = < u_{m'} - u, v > - < u_{m'} - u_1, v > \to 0$$
  Donc $u_1 = u$.

Etape 4 : la limite u est solution de (P)

Vérification de (3.2.4)

Considérons $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)$ et $v \in \mathcal{V}$.
Par définition de l'approximation $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}^*}$, il existe une suite $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}*}$ telle que

$$\begin{cases} v_m \in V_m \\ v_m \to v \text{ fortement.} \end{cases}$$

Donc si l'on pose

$$\begin{cases} \psi_m = \varphi \otimes v_m \ (i.e.\ \psi_m(t) = \varphi(t)v_m) \\ \psi = \varphi \otimes v \ (i.e.\ \psi(t) = \varphi(t)v) \end{cases}$$

on a notamment

$$(3.2.13) \quad \begin{cases} i)\ \psi_{m'} \to \psi \text{ dans } L^2(0,T;V) \text{ fort, lorsque } m' \to +\infty \\ ii)\ \psi'_{m'} = \dfrac{\mathrm{d}\psi_{m'}}{\mathrm{d}t} \to \psi' \text{ dans } L^2(0,T;H) \text{ fort, lorsque } m' \to +\infty \end{cases}$$

D'après le problème (P_m) (3.2.7), on déduit
(3.2.14)
$$\begin{cases} -\displaystyle\int_0^T (u_{m'}(t), \psi'_{m'}(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^T a\,(t; u_{m'}(t), \psi_{m'}(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^T (f(t), \psi_{m'}(t))\,\mathrm{d}t, \\ \psi_m = \varphi \otimes v_m \ (i.e.\ \psi_m(t) = \varphi(t)v_m), \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[) \end{cases}$$

D'après (3.2.13) i) :

$$\int_0^T (f(t), \psi_{m'}(t))\,\mathrm{d}t \to \int_0^T (f(t), v)\,\varphi(t)\mathrm{d}t, \quad \text{quand} \quad m' \to \infty$$

Proposition 3.3. *Soit* $(X, (\cdot, \cdot))$ *un espace de Hilbert, et* $u_n,\ v_n,\ u,\ v \in X$.
Si $\begin{cases} u_n \to u \ fortement \\ v_n \to v \ faiblement \end{cases}$ *alors* $(v_n, u_n) \to (u, v)$. [1]

Démonstration. Il existe $m > 0$ tel que $\|v_m\| < M$.
Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|(v_n - v, u)| < \epsilon$ et $\|u_n - u\| < \epsilon$.
Pour tout $n > N$:

$$\begin{aligned} |(v_n, u_n) - (v, u)| &= |(v_n, u_n) - (v_n, u) + (v_n, u) - (v, u)| \\ &= |(v_n, u_n - u) + (v_n - v, u)| \\ &\leq \|v_n\|\,\|u_n - u\| + |(v_n - v, u)| \\ &\leq M\epsilon + \epsilon. \end{aligned}$$

□

D'après ii) du lemme 3.3, (3.2.13) ii) et la proposition 3.3 :

$$\int_0^T (u_{m'}, \psi'_{m'}(t))\,\mathrm{d}t \to \int_0^T (u(t), \psi'(t))\,\mathrm{d}t, \quad \text{quand} \quad m' \to \infty$$

Enfin, d'après le point iii) du lemme (3.3), (3.2.13) i) et la proposition 3.3 :

$$\int_0^T a\,(t; u_{m'}(t), \psi_{m'}(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^T (A(t)u_{m'}(t), \psi_{m'}(t))\,\mathrm{d}t \to \int_0^T a\,(t; u(t), \psi(t))\,\mathrm{d}t,$$

quand $m' \to \infty$. Ainsi on peut passer à la limite dans (3.2.14) et l'on obtient
(3.2.15)
$$\begin{cases} -\displaystyle\int_0^T (u(t), v)\,\varphi'(t)\mathrm{d}t + \int_0^T a\,(t; u(t), v)\,\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_0^T (f(t), v)\,\varphi(t)\mathrm{d}t, \\ \forall v \in \mathcal{V} \ \text{ et } \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[) \end{cases}$$

Comme $\mathcal{V}$ est dense dans V, l'égalité précédente (3.2.15) reste vraie pour tout $v \in V$ si bien que nous avons démontré que u vérifie (3.2.4).

1. D'après H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, 2005

Vérification de (3.2.3)

A partir de (3.2.15), on peut déduire

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u(t),v)\,\varphi'(t)\mathrm{d}t &= \int_0^T (f(t),v)\,\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_0^T a\,(t;u(t),v)\,\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T (f(t)-A(t)u(t),v)\,\varphi(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Comme $f \in L^2(V')$ et $A(\cdot)u(\cdot) \in L^2(V')$, on a

$$\begin{cases} g = f - A(\cdot)u \in L^2(V') \\ -\displaystyle\int_0^T (u(t),v)\,\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_0^T (g(t),v)\,\varphi(t)\mathrm{d}t, \quad \forall v \in V, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[), \end{cases}$$

d'où d'après la définition de la dérivée faible,

$$u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in L^2(V') \tag{3.2.16}$$

ce qui implique (3.2.15). Ainsi, d'après le théorème 3.1, $u \in W(0,T;V,V')$ est (la classe d') une fonction continue de $[0,T] \to H$.

Remarque 3.11. On en déduit que $u \in \mathcal{C}([0,T],H)$, et $u(0)$ a bien un sens.

Vérification de (3.2.5)

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,T]$, nulle dans un voisinage de T, avec $\varphi(0) \neq 0$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Alors $\psi = \varphi \otimes v,\ v \in V$ est dans $W(0,T;V,V')$ et par la formule d'intégration par partie (3.2), on a

$$\int_0^T (u'(t),\varphi(t)v)\,\mathrm{d}t = -\int_0^T (u(t),\varphi'(t)v)\,\mathrm{d}t - (u(0),v)\varphi(0). \tag{3.2.17}$$

D'après l'équation (3.2.15) et (3.2.16), on a aussi

$$\int_0^T (u'(t),\varphi(t)v)\,\mathrm{d}t = \int_0^T (f(t),\varphi(t)v)\,\mathrm{d}t - \int_0^T a\,(t;u(t),v)\,\varphi(t)\mathrm{d}t. \tag{3.2.18}$$

Par ailleurs, d'après la formulation du problème approché (3.2.7), on déduit que

$$\int_0^T (u'_{m'}(t),v_{m'})\,\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_0^T (f(t),v_{m'})\,\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_0^T a\,(t;u_{m'}(t),v_{m'})\,\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

et aussi

$$\int_0^T (u'_{m'}(t), v_{m'})\,\varphi(t)\mathrm{d}t = -\int_0^T (u_{m'}(t), v_{m'})\,\varphi'(t)\mathrm{d}t - (u_{0m'}(0), v_{m'})\varphi(0)$$

Si nous passons les deux dernières égalités à la limite lorsque $m' \to \infty$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\lim_{m'\to\infty}\int_0^T (u'_{m'}(t), v_{m'})\,\varphi(t)\mathrm{d}t &= \int_0^T (f(t), v)\,\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_0^T a\,(t; u(t), v)\,\varphi(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^T (u'(t), \varphi(t)v)\,\mathrm{d}t,\ \text{d'apres (3.2.18), et}\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

$$\lim_{m'\to\infty}\int_0^T (u'_{m'}, v_{m'})\,\varphi(t)\mathrm{d}t = -\int_0^T (u(t), \varphi'(t)v)\,\mathrm{d}t - (u_0, v)\varphi(0). \tag{3.2.20}$$

D'où en comparant (3.2.17) et (3.2.20), compte tenu de (3.2.19), on obtient

$$(u(0), v) = (u_0, v),\ \forall v \in V. \tag{3.2.21}$$

D'après la densité de V dans H, (3.2.21) reste vraie pour tout $v \in H$ et donc :

$$u(0) = u_0.$$

Ainsi

Lemme 3.4. *La fonction u est solution du problème (P).*

Remarque 3.12. En combinant la convergence d'une sous-suite vers une solution u, l'estimation et l'unicité de cette solution, on montre que toute la suite converge. En effet, supposons qu'elle ne converge pas entièrement, il existe une partie de la suite qui est à une certaine distance de u. En utilisant l'estimation, il en existe une sous-suite qui converge vers une fonction qui est également solution et nous obtenons une contradiction avec l'unicité de la solution puisque nous avons deux solutions distinctes.

Etape 5 : Convergence forte

Introduisons maintenant

$$X_m(T) = \frac{1}{2}\left|u_m(T) - u(T)\right|^2 + \int_0^T a(t; u_m(t) - u(t), u_m(t) - u(t))\mathrm{d}t.$$

D'après le lemme 3.2, $u_m(T)$ reste borné dans H et l'on peut extraire $\{u_{m'}\}$ dans le lemme 3.3 avec

$$u_{m'}(T) \to u_T \text{ dans } H \text{ faible.}$$

Par ailleurs, si on prend $\varphi \in \mathcal{D}([0,T])$ nulle au voisinage de 0, avec $\varphi(T) \neq 0$, alors par raisonnement analogue à celui pour monter $u(0) = u_0$, on obtient

$$(u(T), v) = (u_T, v), \ \forall v \in V$$

d'où on en déduit

$$u(T) = u_T.$$

Compte tenu de la remarque (3.12), il en résulte

$$u_m(T) \to u(T) \text{ dans H faiblement.} \tag{3.2.22}$$

Ceci posé,

$$X_m(T) = \frac{1}{2}\left|u_m(T)\right|^2 + \int_0^T a(t; u_m(t), u_m(t))\mathrm{d}t + Y_m(T).$$

où

$$Y_m(T) = -(u_m(T), u(T)) + \frac{1}{2}|u(T)|^2 - \int_0^T a(t, u_m(t), u(t))\mathrm{d}t$$
$$- \int_0^T a(t, u(t), u_m(t))\mathrm{d}t + \int_0^T a(t, u(t), u(t))\mathrm{d}t.$$

Grâce au lemme 3.3 et (3.2.22), on en déduit

$$\lim_{m\to\infty} Y_m(T) = -\frac{1}{2}\left|u(T)\right|^2 - \int_0^T a(t; u(t), u(t))\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs de (3.2.9), on déduit par intégration de 0 à T :

$$\frac{1}{2}\left|u_m(T)\right|^2 + \int_0^T a(t; u_m(t), u_m(t))\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left|u_{0m}\right|^2 + \int_0^T (f(t), u_m(t))\mathrm{d}t, \tag{3.2.23}$$

d'où

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{2}\left|u_m(T)\right|^2 + \int_0^T a(t; u_m, u_m)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left|u_0\right|^2 + \int_0^T (f(t), u(t))\mathrm{d}t, \tag{3.2.24}$$

Mais d'après l'équation (3.2.4) du problème (P)

$$\frac{1}{2}\left|u_0\right|^2 + \int_0^T (f(t), u(t))\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left|u(T)\right|^2 + \int_0^T a(t; u(t), u(t))\mathrm{d}t. \tag{3.2.25}$$

Ainsi (3.2.22), (3.2.24), (3.2.25) impliquent

$$\lim_{m\to\infty} X_m(T) = 0. \tag{3.2.26}$$

Comme d'après (3.2.6), on a

$$0 \leq \alpha \int_0^T \|u_m(t) - u(t)\|^2 \,\mathrm{d}t \leq X_m(T), \tag{3.2.27}$$

on déduit de (3.2.26), (3.2.27) la

Proposition 3.4. *Lorsque $m \to \infty$, on a $u_m \to u$ dans $L^2(V)$ fortement.*

3.2.7 Application à l'équation de diffusion linéaire

Pour appliquer ce cadre général à notre équation de diffusion linéaire

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y = v\mathbb{1}_{\omega\times(0,T)}, &\quad \textit{sur } Q_T = \Omega \times (0,T) \\ y = 0, &\quad \textit{sur } \Sigma_T = \Gamma \times (0,T) \\ y(0) = y_0 & \end{aligned}$$

il suffit de prendre $V = H_0^1(\Omega),\ H = L^2(\Omega),\ V' = H^{-1}(\Omega)$.
Donc pour tout contrôle $v \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ et toute condition initiale $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, il existe une unique solution $y \in W(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega))$.

3.3 Contrôle approché

Pour démontrer la contrôlabilité approchée [2], nous utilisons le résultat de densité suivant :

Proposition 3.5. *Lorsque v parcourt l'espace $L^2(\omega \times (0,T))$, y(T ;v) parcourt un sous-espace affine qui est dense dans $L^2(\Omega)$.*

Lemme 3.5. *(Mizohata, 1958) Soit une équation parabolique de la forme :*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L\right) u(t,x) = 0 \tag{3.3.1}$$

où L est opérateur elliptique du second ordre. Toute solution u(t,x) de (3.3.1), définie dans O_1 ouvert de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, s'annulant sur O_1 ouvert de O_2, s'annule

2. d'après Roland Glowinski et Jacques-Louis Lions, *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems : A numerical approach*, 2008

dans le composant horizontal de O_2, c'est-à-dire l'ensemble des points de O_2 qui peuvent être joints à un point de O_1 par une ligne brisée horizontale (c'est-à-dire une ligne dont le t-composant des coordonnées soit constant). [3]

Nous ne démontrerons pas ce Lemme, pourtant d'une importance capitale dans notre étude, pour des raisons de place.

Démonstration. (Propriété) Soit Y_0 l'unique solution au problème (3.0.1), (3.0.2) et (3.0.3) lorsque v=0,
c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y = 0, & sur\ Q_T = \Omega \times (0,T) \\ y = 0, & sur\ \Sigma_T = \Gamma \times (0,T) \\ y(0) = y_0 & \end{cases}$$

Alors la fonction $y(T; v) - Y_0$ décrit un sous-espace de $L^2(\Omega)$, en effet :
Soient $v,\ v' \in L^2(\omega \times (0,T))$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, donc on a $y(\cdot, v)$ et $y(\cdot, v')$ solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y = v\mathbb{1}_{\omega\times(0,T)},\ (\text{resp. } v'\mathbb{1}_{\omega\times(0,T)}) & sur\ Q_T = \Omega \times (0,T) \\ y = 0, & sur\ \Sigma_T = \Gamma \times (0,T) \\ y(0) = y_0\ \ , & \end{cases}$$

d'où $[\lambda(y(T,v) - Y_0) + y(T,v')] - Y_0 = y(T, \lambda v + v') - Y_0$.
Nous devons donc montrer la densité de ce sous-espace.
Ceci équivaut à montrer la même densité lorsque $y_0 = 0$.
Considérons donc un élément g $\in L^2(\Omega)$ tel que

$$(y(T;v), g)_{L^2(\omega)} = 0,\ \forall v \in L^2(\omega \times (0,T)). \tag{3.3.2}$$

Ensuite, nous introduisons ψ comme la solution de

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathcal{A}^*\psi = 0\ sur\ Q_T, \tag{3.3.3}$$

où l'opérateur $\mathcal{A}^*$ est l'adjoint de $\mathcal{A}$ et où ψ satisfait également

$$\psi = 0\ sur\ \Sigma_T, \tag{3.3.4}$$

$$\psi(x,T) = g(x). \tag{3.3.5}$$

3. D'après Siger Mizohata, *Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques*, 15 octobre 1958

Donc, en multipliant (3.3.3) des deux côtés par $y(\cdot, v)$ et en intégrant sur ω_T, on a :

$$-\int_{\omega_T} \frac{\partial \psi}{\partial t} y \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{\omega_T} \mathcal{A}^* \psi y \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0,$$

En appliquant la formule de *Green* (3.2), et la définition de l'adjoint, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\omega_T} \psi \frac{\partial y}{\partial t} \mathrm{d}x\mathrm{d}t - (y(T;v), \psi(T;v))_{L^2(\Omega)} + \int_{\omega_T} \psi \mathcal{A} y \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \int_{\omega_T} \psi \left[\frac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A} y \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}t - (y(T;v), g)_{L^2(\Omega)} \text{ (avec 3.3.5)} \end{aligned}$$

Donc,

$$(y(T;v), g)_{L^2(\Omega)} = \iint_{\omega \times (0,T)} \psi v \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{3.3.6}$$

Il s'ensuit, par orthogonalité, grâce à (3.3.6), que (3.3.2) est équivalent à

$$\psi = 0, \ \textit{sur } \omega \times (0, T).$$

Il suit donc du célèbre théorème d'unicité de Mizohata (Lemme 3.5) que

$$\psi \equiv 0, \ \textit{sur } Q_T; \tag{3.3.7}$$

En effet, Q_T est bien le composant horizontal de $\omega \times (0, T)$ puisque qu'ils ont le même intervalle de temps.
En combinant (3.3.5) et (3.3.7) il découle que $g = 0$, ce qui prouve la proposition. □

Revenons à notre problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A} y = v \mathbb{1}_{\omega \times (0,T)}, & \textit{sur } Q_T = \Omega \times (0,T) \\ y = 0, & \textit{sur } \Sigma_T = \Gamma \times (0,T) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Soit B la boule unité de $L^2(\Omega)$ et $\beta > 0$. Pour avoir la contrôlabilité approchée de notre système, nous voulons :

$$y(T;v) \in y_T + \beta B$$

D'après la proposition 3.5, on peut trouver un v nous permettant d'avoir une telle solution.

Par contre, il existe plusieurs contrôles v de sorte que l'on soit à un certaine distance de notre fonction cible à l'instant T, ce qui peut poser problème. Par exemple, si nous n'avons pas unicité du contrôle voulu, lorsque l'on aura plusieurs algorithmes numériques permettant que les trouver, on ne pourra pas comparer ces algorithmes, puisqu'ils ne convergeront pas forcément vers la même limite. Comme nous avons le choix, nous prendrons donc celui que nous "coûtera le moins cher", c'est-à-dire celui qui minimisera une certaine norme. Par exemple, notre problème peut devenir :

$$\begin{cases} \text{Trouver } w \in L^2(\omega_T) \text{ tel que} \\ \dfrac{1}{2} \iint_{\omega_T} v^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \inf\limits_{w \in L^2(\omega_T)} \dfrac{1}{2} \iint_{\omega_T} w^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \\ y(T; v) \in y_T + \beta B. \end{cases} \tag{3.3.8}$$

3.4 Argument de pénalité

En optimisation, $\inf\limits_{v \in L^2(\omega_T)} \dfrac{1}{2} \displaystyle\iint_{\omega_T} v^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t$ est appelé la contrainte implicite du problème d'optimisation et $y(T; v) \in y_T + \beta B$ la contrainte explicite. Cette dernière formulation n'étant pas des plus pratiques, nous la modifierons afin qu'elle n'ait que des contraintes implicites. Ainsi, nous n'aurons qu'à minimiser une fonctionnelle qui sera de plus convexe, ce qui rentrera dans le cadre de théorèmes généraux d'analyse convexe.
Nous définissons les fonctionnelles et l'opérateur suivants :

$$F_1(v) = \frac{1}{2} \iint_{\omega_T} v^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

$$F_2(g) = \frac{k}{2} \|g - y_T\|^2_{L^2(\Omega)},$$

$$Lv = y(T; v),$$

$$J_k(v) = F_1(v) + F_2(Lv).$$

Et on considère le problème d'optimisation

$$\inf_{v \in L^2(\omega_T)} J_k(v) \tag{3.4.1}$$

Remarque 3.13. Ce problème admet une unique solution notée u_k.

Théorème 3.5. [4] *Pour tout $\beta > 0$, il existe k assez grand tel que la solution u_k de (3.4.1) vérifiant*

$$\|y(T, u_k) - y_T\| \leq \beta$$

4. Roland Glowinski et Jacques-Louis Lions, *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems : A numerical approach*, 2008

Démonstration. Il existe un contrôle w tel que

$$\|y(T;w) - y_T\| < \beta/\sqrt{2}$$

Et il existe $k > 0$ tel que

$$\frac{1}{k}\iint_{\omega_T} w^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}\beta^2.$$

Comme

$$J_k(u_k) = \frac{1}{2}\iint_{\omega_T} u_k^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{k}{2}\|y(T;u_k) - y_T\|^2_{L^2(\Omega)},$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|y(T;u_k) - y_T\|^2_{L^2(\Omega)} &= \frac{2}{k}\left(J_k(u_k) - \frac{1}{2}\iint_{\omega_T} u_k^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right) \\
&\leq \frac{2}{k}J_k(u_k) \\
&\leq \frac{2}{k}\left(\frac{1}{2}\iint_{\omega_T} w^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{k}{2}\|y(T;w) - y_T\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq \beta^2.
\end{aligned}$$

□

3.5 Fonctions s.c.i., fonctions polaires et sous-gradient

Dans cette partie, en nous appuyant sur *Analyse convexe et problèmes variationnels* de I. Ekeland et R. Teman, nous donnerons la définition d'une fonction semi-continue inférieurement, d'une fonction polaire, d'un sous-gradient, et quelques résultats qui nous seront utiles pour l'étude du problème de minimisation.

Soit V un espace de Banach réflexif.

Définition 3.4. On dit qu'une fonction $F : V \to \bar{\mathbb{R}}$ est semi-continue inférieurement, si elle satisfait à l'une des conditions équivalentes :

$$(i)\ \forall a \in \mathbb{R},\ \{u \in V | F(u) \leq a\} \text{ est fermé}$$
$$(ii)\ \forall \bar{u} \in V, \liminf_{u \to \bar{u}} F(u) \leq F(\bar{u}).$$

Définition 3.5. On note $\Gamma(V)$ l'ensemble des fonctions $F : V \to \bar{\mathbb{R}}$ qui sont une enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines continues. On note $\Gamma_0(V)$ l'ensemble des $F \in \Gamma(V)$ autres que les constantes $+\infty$ et $-\infty$.

PROPOSITION 3.6. *Il est équivalent de dire :*

(i) $F \in \Gamma(V)$

(ii) F *est convexe semi-continue inférieurement de* V *dans* $\bar{\mathbb{R}}$*, et si* F *prend la valeur* $-\infty$*, alors* F *vaut identiquement* $-\infty$*.*

Démonstration. Remarquons que l'enveloppe supérieure d'une famille vide est $-\infty$, et que si la famille envisagée est non-vide, F ne peut prendre la valeur $-\infty$. On a donc (i)⇒(ii).
Réciproquement, supposons que F est convexe semi-continue inférieurement de V dans $\bar{\mathbb{R}}$, ne prenant pas la valeur $-\infty$. Si F est la constante $+\infty$, c'est l'enveloppe convexe supérieure de toutes les fonctions affines continues de V dans $\mathbb{R}$. Si $F \in \Gamma_0(V)$, pour tout $\bar{u} \in V$, pour tout $\bar{a} < F(\bar{u})$, nous allons montrer qu'il existe une fonction affine continue de V dans $\mathbb{R}$ dont la valeur en $\bar{u}$ est comprise entre $\bar{a}$ et $F(\bar{u})$, ce qui établira le résultat.
Or épi $F = \{(u,a) \in V \times \mathbb{R} | f(u) \leqslant a\}$ est un convexe fermé ne contenant pas le point $(\bar{u}, \bar{a})$. D'après le théorème de Hahn-Banch, on peut les séparer strictement par un hyperplan affine fermé $\mathcal{H}$ de $V \times \mathbb{R}$ d'équation :

$$\mathcal{H} = \{(u,a) \in V \times \mathbb{R} | \ell(u) + \alpha a = \beta\}$$

où ℓ est une forme linéaire continue non-nulle sur V, α et $\beta \in \mathbb{R}$.
On a donc :

$$\begin{aligned} &\ell(\bar{u}) + \alpha\bar{a} < \beta \\ \forall (u,a) \in \text{épi}F, \quad &\ell(u) + \alpha a > \beta. \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Si $F(\bar{u}) < +\infty$, on peut prendre $u = \bar{u}$ et $a = F(\bar{u})$ ce qui donne

$$\ell(\bar{u}) + \alpha F(\bar{u}) > \beta \tag{3.5.2}$$

En divisant, (3.5.1) et (3.5.2) par α, on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{a} < \frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\ell(\bar{u}) < F(\bar{u}). \\ \frac{1}{\alpha}\ell(\bar{u}) + F(\bar{u}) > \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

D'où

$$\bar{a} < F(\bar{u})$$

La fonction affine continue $\dfrac{\beta}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha}\ell(.)$ (dont le graphe n'est autre que $\mathcal{H}$) répond donc à la question.

Si $F(\bar{u}) = +\infty$, on peut avoir $\alpha \neq 0$ et on se ramène au cas précédent ; ou $\alpha = 0$. Dans ce cas, (3.5.1) et (3.5.2) signifient que la fonction affine continue $\beta - \ell(.)$ est > 0 en $\bar{u}$ et < 0 sur dom$F$. Construisons alors, grâce au cas précédent, une minorante affine continue quelconque de F, soit $\gamma - m(.)$. Alors, pour tout $c > 0$, $\gamma - m(.) + c(\beta - \ell(.))$ est toujours une minorante affine continue de F, et il ne reste plus qu'à choisir c assez grand pour que

$$\gamma - m(\bar{u}) - c(\beta - \ell(\bar{u})) > \bar{a}.$$

□

DÉFINITION 3.6. Si $F : V \to \bar{\mathbb{R}}$, on appelle *fonction polaire* de F et on note F^* l'application de V' dans $\bar{\mathbb{R}}$ définie par

$$F^*(u^*) = \sup_{u \in \text{dom } F} \{\langle u, u^* \rangle - F(u)\}$$

où dom F=$\{u \mid F(u) < +\infty\}$ désigne le *domaine effectif* de F.

Exemple 3.4. Supposons que V soit un Hilbert et soit $F(u) = \frac{1}{2} \|u\|_V^2$. On a dom F=V, et

$$\begin{aligned}
F^*(v) &= \sup_{u \in V}\{\langle u, v\rangle_V - F(u)\} \\
&= \sup_{u \in V}\{\langle u, v\rangle_V - \frac{1}{2}\|u\|_V^2\} \\
&= \sup_{u \in V}\{\langle u, v\rangle - \frac{1}{2}\|u\|_V^2 - \frac{1}{2}\|v\|_V^2\} + \frac{1}{2}\|v\|_V^2 \\
&= \sup_{u \in V}\{-\frac{1}{2}\|u - v\|_V^2\} + \frac{1}{2}\|v\|_V^2 \\
&= F(v).
\end{aligned}$$

DÉFINITION 3.7. Soit F une application de V dans $\bar{\mathbb{R}}$. On dira qu'une minorante affine continue ℓ de F est *exacte au point* $u \in V$ si $\ell(u) = F(u)$.

Remarque 3.14. F^* est l'enveloppe supérieure de la famille de fonctions affines continues $\langle u, .\rangle - F(u)$ pour $u \in$ dom$F$ de V' dans $\bar{\mathbb{R}}$.

DÉFINITION 3.8. On dit qu'une fonction F de V dans $\bar{\mathbb{R}}$ est *sous-différentiable* au point $u \in V$ si elle admet une minorante affine continue, exacte en u. La pente $u^* \in V'$ d'une telle minorante est appelée un *sous-gradient* de F en u, et l'ensemble des sous-gradients en u est appelé le *sous-différentiel* en u et est noté $\partial F(u)$.

Exemple 3.5. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = |x|, \ \forall\ x \in \mathbb{R}$.
Alors $\partial F(0) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Exemple 3.6. Supposons que V est un Hilbert et reprenons la fonction $F(u) = \frac{1}{2}\|u\|_V^2$. Pour tout $u,\ h \in V$:

$$F(u+h) \quad = \quad \frac{1}{2}\|u\|_V^2 + \langle u, h\rangle + \frac{1}{2}\|h\|_V^2$$

Donc F est sous-différentiable en u et son sous-différentiel est $\partial F(u) : h \to \langle u, h\rangle$.

Remarque 3.15. Si F est différentiable en u, alors elle est également sous-différentiable en u.

Conséquence 3.1. Voici une conséquence qui peut faire comprendre en quoi la sous-différentiabilité est si importante dans les problèmes de minimisation :
Si F est sous-différentiable,

$$F(u) = \min_{v \in V} F(v) \Leftrightarrow 0 \in \partial F(u).$$

Proposition 3.7. *Soient F une fonction de V dans $\bar{\mathbb{R}}$ et F^* sa polaire. Alors $u^* \in \partial F(u)$ si et seulement si :*

$$F(u) + F^*(u^*) = \langle u, u^*\rangle. \tag{3.5.3}$$

Démonstration. Soit $u^* \in \partial F(u)$.
La minorante affine continue exacte associée ℓ sera de la forme

$$\ell(v) = \langle v - u, u^*\rangle + F(u)$$

telle que

$$l(v) \leqslant F(v)$$

c'est-à-dire

$$\langle u, u^*\rangle - F(u) \geqslant \langle v, u^*\rangle - F(v)$$

Donc

$$\langle u, u^*\rangle - F(u) = F^*(u^*).$$

Réciproquement, si (3.5.3) est vérifiée, la fonction affine continue

$$\ell(.) = \langle ., u^*\rangle + F(u) - \langle u, u^*\rangle$$

minore F.
En effet, pour tout $v \in V$, on a :

$$\begin{array}{rcl} l(v) & = & \langle v, u^* \rangle + F(u) - \langle u, u^* \rangle \\ & = & \langle v, u^* \rangle - F^*(u^*) \\ & = & \langle v, u^* \rangle - \sup\limits_{w \in \text{dom } F} \{\langle w, u^* \rangle - F(w)\} \\ & \leqslant & \langle v, u^* \rangle - \langle v, u^* \rangle + F(v) \\ & = & F(v). \end{array}$$

De plus ℓ est exacte en u. □

Exemple 3.7. Supposons que V est un Hilbert et reprenons la fonction $F(u) = \frac{1}{2}\|u\|_V^2$.
F est sous-différentiable en u et sa différentielle est $h \to \langle u, h \rangle_V$.
Et d'un autre côté, on a :

$$\begin{array}{rl} & F(u) + F^*(v) = \langle u, v \rangle_V. \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}\|u\|_V^2 + \frac{1}{2}\|v\|_V^2 = \langle u, v \rangle_V \\ \Leftrightarrow & u = v \end{array} \tag{3.5.4}$$

Donc $\partial F(u) = u$.

Afin de caractériser le sous-gradient d'une fonction convexe, nous aurons besoin du résultat suivant :

Proposition 3.8. *Soit $F : V \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Il est équivalent de dire :*

(i) il existe un ouvert $\mathcal{O}$ non-vide sur lequel F ne vaut pas constamment $-\infty$ et est majorée par une constante $a < +\infty$;

(ii) F est propre (i.e. F vaut nulle part $-\infty$ et ne vaut identiquement $+\infty$), l'intérieur de son domaine effectif est non-vide, et F y est continue.

Démonstration. Il est clair que (ii) entraîne (i).
Respectivement, si (i) est vérifiée, $\mathcal{O} \subset (\text{dom} F)^o$.
Prenons $u \in \mathcal{O}$ tel que F(u) $> -\infty$.
Montrons que F est continue en v :
On se ramène par translation au cas où u=0 et $F(0)$=0. (par exemple si l'on considère $G(.) = F(u - .) - F(u)$.)
Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de l'origine tel que $F(v) \leq a < +\infty$, pour tout v de $\mathcal{V}$.
Posons $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cap -\mathcal{V}$, (qui est un voisinage symétrique de 0) et donnons-nous

$\epsilon \in]0,1[$.
Si $v \in \epsilon\mathcal{W}$, on a, d'après la convexité :

$$\frac{v}{\epsilon} \in \mathcal{V}, \text{ donc } F(v) \leq (1-\epsilon)F(0) + \epsilon F(v/\epsilon) \leq \epsilon a,$$

$$-\frac{v}{\epsilon} \in \mathcal{V}, \text{ donc } F(v) \geq (1+\epsilon)F(0) - \epsilon F(-v/\epsilon) \geq -\epsilon a,$$

Soit au total $|F(v)| \leq \epsilon a$ pour tout v de $\epsilon\mathcal{W}$, d'où la continuité de F en u.
F est donc finie sur un voisinage de u, donc propre. Pour tout $v \in (\text{dom } F)^o$, il existe $\rho > 1$ tel que $w = u + \rho(v-u)$ appartienne encore à $(\text{dom } F)^o$. L'homothétie h de centre w et de rapport $1 - 1/\rho$ transforme u en v. En effet,

$$(1-\frac{1}{\rho})(u-w) = v - w,$$

d'où

$$(1-\frac{1}{\rho})u = v - \frac{1}{\rho}w,$$

on en déduit que

$$(\rho - 1)u = \rho v - w,$$

donc

$$w = u + \rho(v-u)$$

De plus, h transforme $\mathcal{O}$ en un ouvert $h(\mathcal{O})$ contenant v. Pour tout $v' \in h(\mathcal{O})$, on a par convexité :

$$F(v') \leq \frac{\rho-1}{\rho} F o h^{-1}(v') + \frac{1}{\rho}F(w) \leq \frac{\rho-1}{\rho}a + \frac{1}{\rho}F(w)$$

Car h transforme $h^{-1}(v')$ en v' :

$$v' = \frac{1}{\rho}w + (1-\frac{1}{\rho})h^{-1}(v')$$

De plus, $h^{-1}(v') \in \mathcal{V}$, d'où

$$F(v') \leq \frac{\rho-1}{\rho}a + \frac{1}{\rho}F(w)$$

Résumons-nous : tout point $v \in (\text{dom } F)^o$ possède un voisinage $h(\mathcal{O})$ où F est majorée par une constante finie, elle est donc continue en v. $\square$

Corollaire 3.1. *Soit F une fonction convexe de V dans $\bar{\mathbb{R}}$, finie et continue au point $u \in V$. Alors $\partial F(v) \neq \varnothing$ pour tout $v \in (\text{dom } F)^o$, et en particulier $\partial F(u) \neq \varnothing$.*

Démonstration. Comme F est finie et continue en u, elle est bornée supérieurement au voisinage de u, et elle est donc finie et continue en tout point de $(\text{dom } F)^o$ d'après la proposition 3.8. Il suffit donc de montrer que $\partial F(u) \neq \varnothing$.
Comme F est convexe, épi F est un convexe de $V \times \mathbb{R}$. Comme F est continue, l'intérieur de épi F est non-vide. Pour le voir, il suffit de prendre un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de V sur lequel F soit majorée par la constante $c \in \mathbb{R}$: l'ensemble $\mathcal{O}\times]c, +\infty[$ est un ouvert de $V \times \mathbb{R}$ contenu dans épi F.
Comme $(u, F(u))$ appartient à la frontière de épi F, d'après le théorème de Hahn-Banach, on peut le séparer de $(\text{épi } F)^o$ par un hyperplan affine fermé. (épi $F = \{(u, a) \in V \times \mathbb{R} | f(u) \leq a\}$ On obtient ainsi un hyperplan dit d'appui $\mathcal{H}$ de épi F, contenant $(u, F(u))$. Ecrivons son équation :

$$\mathcal{H} = \{(v, a) \in V \times \mathbb{R} | \langle v, u^* \rangle + \alpha a = \beta\} \quad \text{avec } u^* \in V', \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

où les coefficients, non tous nuls, sont liés par :

$$\begin{aligned} \forall (v, a) \in \text{epi } F, \quad & \langle v, u^* \rangle + \alpha a \geqslant \beta \\ & \langle u, u^* \rangle + \alpha F(u) = \beta. \end{aligned}$$

Si α=0, on aura $\langle v - u, u^* \rangle \geqslant 0$ pour tout v de dom F, d'où u^*=0 puisque dom F est un voisinage de u. On a donc $\alpha > 0$, et en divisant par α :

$$\begin{aligned} \forall v \in dom\ F, \quad & \frac{\beta}{\alpha} - \langle v, u^*/\alpha \rangle \leqslant F(v) \\ & \frac{\beta}{\alpha} - \langle u, u^*/\alpha \rangle = F(u). \end{aligned}$$

Soit enfin :

$$\forall v \in V, \quad \langle v - u, -u^*/\alpha \rangle + F(u) \leqslant F(v)$$

Ce qui prouve que $-u^*/\alpha \in \partial F(u)$, qui est donc non-vide. □

3.6 Problème dual : généralités

3.6.1 Introduction

Rappelons notre problème d'optimisation

$$\inf_{v \in L^2(\omega_T)} J(v, Lv),$$

où

$$J(v, Lv) = F_1(v) + F_2(Lv),$$

avec

$$F_1(v) = \frac{1}{2}\iint_{\omega_T} v^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \;\; F_2(g) = \frac{k}{2}\left\| g - y_T \right\|^2_{L^2(\Omega)}, \;\; Lv = y(T;v).$$

Afin de le résoudre, nous transformerons notre problème en son problème dit *dual*.

3.6.2 Cadre général

Soient V et Y deux espaces de Banach réflexifs. On note $\langle .,. \rangle_V$ et $\langle .,. \rangle_Y$ leurs crochets de dualité respectif. On se donne une fonction F de V dans $\bar{\mathbb{R}}$, et on suppose F convexe et semi-continue inférieurement.
Regardons le problème de minimisation

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{v\in V} F(v).$$

Définition 3.9. On appelle *solution* du problème $(\mathcal{P})$ tout élément $u \in V$ tel que :

$$F(u) = \inf_{v\in V} F(v).$$

Soit maintenant une fonction ϕ de $V \times Y$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ telle que :

$$\phi(u,0) = F(u)$$

et on note

$$h(p) = \inf_{v\in V} \phi(u,p).$$

Définition 3.10. On appelle *problème perturbé* de $(\mathcal{P})$ relativement à ϕ le problème

$$(\mathcal{P}_p) \qquad \inf_{v\in V, p\in Y} \phi(u,p),$$

et *problème dual* de $(\mathcal{P})$ relativement à ϕ le problème

$$(\mathcal{P}^*) \qquad \sup_{p^*\in Y^*} -\phi^*(0,p^*).$$

On dit que le problème $\mathcal{P}$ est *stable* si $h(0)$ est fini et h est sous-différentiable en 0.

On note $inf\mathcal{P}$ (resp. $sup\mathcal{P}_p$ et $sup\mathcal{P}^*$) l'infimum (resp. l'infimum et le supremum) pour le problème $(\mathcal{P})$ (resp. $(\mathcal{P}_p)$ et$(\mathcal{P}^*)$).
La question est de savoir quand est-ce que l'on a

$$inf\mathcal{P} = sup\mathcal{P}^*.$$

Proposition 3.9. *On suppose que ϕ est enveloppe supérieure d'une famille quelconque de fonctions affines continues, que ϕ n'est pas une constante infinie, que ϕ satisfait la condition*

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Il existe } u_0 \in V \textit{ tel que } p \to \phi(u_0,p) \textit{ soit finie} \\ \textit{et continue en } 0(\in Y) \end{array}\right. \tag{3.6.1}$$

et que :

$$\lim \phi(u,0) = +\infty, \quad \text{si } u \in V, \quad \|u\| \to \infty \tag{3.6.2}$$

Dans ces conditions, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^*$ possèdent chacun une solution (au moins),

$$inf\mathcal{P} = sup\mathcal{P}^*, \tag{3.6.3}$$

et toute solution $\bar{u}$ de $\mathcal{P}$ et toute solution $\bar{p}$ de $\mathcal{P}^*$ sont liées par la relation d'extrémalité

$$\phi(\bar{u},0) + \phi^*(0,\bar{p}^*) = 0 \tag{3.6.4}$$

$$(0,\bar{p}) \in \partial\phi(\bar{u},0). \tag{3.6.5}$$

De plus la solution sera unique lorsque la fonction F sera strictement convexe sur V.

Démonstration. Posons $F(u) = \phi(u,0)$.
Etape 1 : Montrons l'existence de solutions pour $\mathcal{P}$ et l'unicité si la fonction F est strictement convexe sur V.
Soit u_n une suite minimisante de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire une suite d'éléments de V tels que :

$$F(u_n) \to \inf_{v\in V} F(v) = \alpha.$$

Notons que α appartient a priori à $[-\infty,+\infty[$; nous verrons par la suite que $\alpha \neq -\infty$. La suite u_n est bornée dans V, car $F(u_n)$ est bornée supérieurement d'après (3.6.2). Il existe donc une suite u_{n_i}, extraite de u_n, qui converge dans V faiblement vers un élément u appartenant à V. F est semi-continue inférieurement sur V pour la topologie faible de V, et ainsi :

$$F(u) \leq \lim_{n_i\to+\infty} F(u_{n_i}) = \alpha,$$

d'où u est solution de

$$\inf_{v\in V} F(u),$$

et $\alpha \neq -\infty$. S'il existe deux solutions différentes u_1, u_2, alors $(u_1+u_2)/2$ est aussi solution ; si F est strictement convexe cela est impossible car alors :

$$F\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(F(u_1)+F(u_2)) = \alpha.$$

Etape 2 : Montrons que le problème $\mathcal{P}$ est stable :
Pour $p \in Y$ soit

$$h(p) = \inf \mathcal{P}_p = \inf_{u\in V} \phi(u,p).$$

Nous allons montrer que la fonction $h : Y \to \bar{\mathbb{R}}$ est convexe.
Soient p, $q \in Y$ et $\lambda \in]0,1[$. Si $h(p) = +\infty$ ou $h(q) = +\infty$, alors

$$h(\lambda p + (1-\lambda)q) \leqslant \lambda h(p) + (1-\lambda)h(q),$$

Supposons maintenant que $h(p) \neq +\infty$ et $h(q) \neq +\infty$.
Pour tout $a > h(p)$ (resp. tout $b > h(q)$), il existe $u \in V$ (resp. $v \in V$) tel que

$$\begin{aligned} h(p) &\leqslant \phi(u,p) \leqslant a \\ h(q) &\leqslant \phi(v,q) \leqslant b, \end{aligned}$$

par définition de l'infimum.
Alors :

$$\begin{aligned} h(\lambda p + (1-\lambda)q) &\leqslant \inf_{w\in V} \phi(w, \lambda p + (1-\lambda)q) \\ &\leqslant \phi(\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda p + (1-\lambda)q) \\ &\leqslant \lambda\phi(u,p) + (1-\lambda)\phi(v,q) \quad \text{(par convexité de } \phi) \\ &\leqslant \lambda a + (1-\lambda)b. \end{aligned}$$

Faisant décroître a vers $h(p)$ et b vers $h(q)$, on en déduit

$$h(\lambda p + (1-\lambda)q) \leqslant \lambda h(p) + (1-\lambda)h(q).$$

Comme la fonction $p \mapsto \phi(u_0,p)$ est convexe et continue en $0(\in Y)$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans Y, sur lequel cette fonction est majorée :

$$\phi(u_0,p) \leqslant M < +\infty, \quad \forall p \in \mathcal{V}.$$

La proposition 3.8 entraîne alors que h est continue en 0. Et le corollaire 3.1 entraîne que h est sous-différentiable en 0. Le problème $\mathcal{P}$ est donc stable. Ce qui entraîne (3.6.3).
Etape 3 : Montrons que les relations d'extrémalité sont équivalentes à (3.6.3) :
On a en effet

$$\inf \mathcal{P} = \phi(\bar{u},0) = \sup \mathcal{P}^* = -\phi^*(0,\bar{p}^*);$$

et (3.6.4) signifie aussi

$$\phi(\bar{u},0)+\phi^*(0,\bar{p}^*)=\langle(\bar{u},0),(0,\bar{p}^*)\rangle,$$

ce qui est identique à l'égalité voulue (3.6.5) d'après la propriété 3.7.
Si réciproquement $\bar{u}$ et $\bar{p}^*$ satisfont (3.6.4).
Pour tout $v \in V$, pour tout $p^* \in V'$:

$$\begin{array}{rcl} \phi^*(0,p^*) & = & \sup\limits_{v\in V, q\in Y}\{\langle p^*,p\rangle-\phi(v,p)\} \\ & \geqslant & \langle p^*,0\rangle-\phi(u,0) \\ & = & -\phi(u,0) \end{array}$$

D'où

$$\begin{array}{rcl} \phi(\bar{u},0) & = & -\phi^*(0,\bar{p}) \\ & \leqslant & \phi(u,0) \text{ (pour tout } u\in V) \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} \phi(\bar{u},0) & = & \inf\limits_{u\in V}\phi(u,0) \\ -\phi^*(0,\bar{p}^*) & = & \sup\limits_{p^*\in Y^*} -\phi^*(0,p^*) \end{array}$$

□

On suppose de plus que la fonction F à minimiser s'écrit

$$F(u)=J(u,Lu)$$

où $L\in\mathcal{L}(V,Y)$, et J est une fonction convexe de $V\times Y$ dans $\bar{\mathbb{R}}$. Le problème $(\mathcal{P})$ prend la forme

$$F(u)=\inf_{v\in V} J(u,Lu).$$

Dans ce cas la fonction ϕ sera

$$\phi(u,p)=J(u,Lu-p)$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} \phi^*(0,p^*) & = & \sup\limits_{u\in V,\ p\in Y}\{\langle p^*,p\rangle-J(u,Lu-p)\} \\ & = & \sup\limits_{u\in V}\sup\limits_{p\in Y}\{\langle p^*,p\rangle-J(u,Lu-p)\}; \end{array}$$

posant, à u fixé, $q=Lu-p$, on trouve

$$\begin{array}{rcl} \phi^*(0,p^*) & = & \sup\limits_{u\in V}\sup\limits_{q\in Y}\{\langle p^*,Lu\rangle-\langle p^*,q\rangle-J(u,q)\} \\ & = & \sup\limits_{u\in V,\ q\in Y}\{\langle L^*p^*,u\rangle-\langle p^*,q\rangle-J(u,q)\} \end{array}$$

D'où

$$\phi^*(0,p^*) \quad = \quad J^*(L^*p^*,-p^*).$$

Le problème $(\mathcal{P}^*)$ s'écrit donc

$$\sup_{p^*\in Y^*} -J^*(L^*p^*,-p^*).$$

Corollaire 3.2. *On suppose qu'il existe $v_0 \in V$ tel que $J(v_0, Lv_0) < +\infty$, la fonction $p \to J(v_0,p)$ étant continue en Lv_0 et que*

$$\lim J(u,Lu) = +\infty, \quad \text{si } u \in V, \quad \|u\| \to \infty$$

Alors les problèmes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}^*)$ possèdent au moins une solution ,

$$inf\mathcal{P} = sup\mathcal{P}^*$$

et toute solution $\bar{v}$ de $\mathcal{P}$ et toute solution $\bar{p}$ de $\mathcal{P}^*$ sont liées par la relation d'extrémalité

$$\begin{aligned} J(\bar{v},L\bar{v}) + J^*(L^*\bar{p},-\bar{p}) = 0 \\ (L^*\bar{p},-\bar{p}) \in \partial J(\bar{v},L\bar{v}). \end{aligned}$$

Démonstration. On applique la proposition 3.9. □

3.6.3 Application au problème pénalisé

Dans cette partie, nous appliquerons ces résultats sur les fonctions conjuguées à notre problème de minimisation.

Théorème 3.6. *(i) Nous avons l'identité*

$$\begin{aligned} &\inf_{v\in L^2(\omega_T)} \frac{1}{2}\iint_{\omega_T} v^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{k}{2}\|y(T;v)-y_T\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= -\inf_{g\in L^2(\Omega)}\left(\frac{1}{2}\iint_{\omega_T}\psi_g^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{1}{2k}\|g\|^2_{L^2(\Omega)} - (g,y_T)_{L^2(\Omega)}\right) \end{aligned} \tag{3.6.6}$$

où ψ_g est donné par

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial\psi_g}{\partial t} + \mathcal{A}^*\psi_g &=& 0 \text{ sur } Q_T, \\ \psi_g &=& 0 \text{ sur } \Sigma_T, \\ \psi_g(x,T) &=& g(x). \end{array}\right.$$

(ii) L'unique solution est donnée par

$$u = \psi_g \mathbb{1}_\omega.$$

Démonstration. Rappelons l'énoncé du problème pénalisé (3.4.1) :

$$(\mathcal{P}_k) \qquad \inf_{v \in L^2(\omega_T)} F_k(v) = \inf_{v \in L^2(\omega_T)} \left(F_1(v) + F_2(Lv)\right),$$

où

$$F_1(v) = \frac{1}{2} \iint_{\omega_T} v^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \;\; F_2(g) = \frac{k}{2} \|g - y_T\|^2_{L^2(\Omega)}, \;\; Lv = y(T; v).$$

Posons : $J(v, Lv) = F_1(v) + F_2(Lv) = F(v)$,
et $\phi(v, p) = J(v, Lv - p)$.
Le problème adjoint sera

$$(\mathcal{P}_k^*) \qquad \sup_{p^* \in L^2(\omega_T)} \left(-\phi^*(0, p^*)\right).$$

ϕ vérifie bien les hypothèses de la proposition 3.2, on a donc :

$$\inf_{v \in L^2(\omega_T)} \left(F_1(v) + F_2(Lv)\right) = - \inf_{g \in L^2(\Omega)} \left(F_1^*(L^*g) + F_2^*(-g)\right)$$

où F_i^* est la fonction conjuguée de F_i et L^* est l'opérateur adjoint de L.
Nous avons donc

$$\begin{aligned}
F_1^*(v) &= \sup_{\hat{v} \in L^2(\omega_T)} \left((v, \hat{v}) - F_1(\hat{v})\right) \\
&= \sup_{\hat{v} \in L^2(\omega_T)} \left(\iint_{\omega_T} v\hat{v} \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \frac{1}{2} \iint_{\omega_T} \hat{v}^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right) \\
&= \sup_{\hat{v} \in L^2(\omega_T)} \left(\iint_{\omega_T} \left(v\hat{v} - \frac{1}{2}\hat{v}^2 - \frac{1}{2}v^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right) + \frac{1}{2} \iint_{\omega_T} v^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \iint_{\omega_T} v^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= F_1(v),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
F_2^*(v) &= \sup_{\hat{v}\in L^2(\Omega)} \big((v,\hat{v})_{L^2(\Omega)} - F_2(\hat{v})\big)\\
&= \sup_{\hat{v}\in L^2(\Omega)} \left(\int_\Omega v\hat{v}\mathrm{d}x - \frac{k}{2}\int_\Omega (\hat{v}-y_T)^2\mathrm{d}x\right)\\
&= \sup_{\hat{v}\in L^2(\Omega)} \left(\int_\Omega \left(\hat{v}(v+ky_T) - \frac{k}{2}\hat{v}^2\right)\mathrm{d}x\right) - \int_\Omega \frac{k}{2}y_T^2\mathrm{d}x\\
&= \sup_{\hat{v}\in L^2(\Omega)} \left(\int_\Omega k\hat{v}(\frac{1}{k}v+y_T) - \frac{k}{2}\hat{v}^2 - \frac{k}{2}(\frac{1}{k}v+y_T)^2\mathrm{d}x\right) + \int_\Omega \frac{k}{2}(\frac{1}{k}v+y_T)^2 - \frac{k}{2}y_T^2\mathrm{d}x\\
&= \sup_{\hat{v}\in L^2(\Omega)} \left(\int_\Omega -k(\hat{v}+\frac{1}{k}v+y_T)^2\mathrm{d}x\right) + \int_\Omega \left(\frac{1}{2k}v^2+vy_T\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2k}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + (v,y_T)_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

Et d'après (3.3.6),

$$L^*(v) = \psi_v \mathbb{1}_\omega$$

où ψ_v vérifie

$$\left\{\begin{array}{rcl}
-\dfrac{\partial\psi_v}{\partial t} + \mathcal{A}^*\psi_v &=& 0 \text{ sur } Q_T,\\
\psi_v &=& 0 \text{ sur } \Sigma_T,\\
\psi_v(x,T) &=& v(x).
\end{array}\right.$$

avec $\mathcal{A}^*$ l'opérateur adjoint de $\mathcal{A}$.
Montrons maintenant le point *(ii)* :
Si l'on note $\bar{u}$ et $\bar{p}^*$ les solutions respectives des problèmes $(\mathcal{P}_k)$ et $(\mathcal{P}_k^*)$, le corollaire (3.2) nous dit également :

$$\begin{aligned}
0 &= J(\bar{u},L\bar{u}) + J^*(L^*\bar{p}^*,-\bar{p}^*)\\
&= F_1(\bar{u}) + F_1^*(L^*\bar{p}^*) + F_2(L\bar{u}) + F_2^*(-\bar{p}^*)\\
&= [F_1(\bar{u}) + F_1^*(L^*\bar{p}^*) - \langle L^*\bar{p}^*,\bar{u}\rangle] + [F_2(L\bar{u}) + F_2^*(-\bar{p}^*) - \langle -\bar{p}^*, L\bar{u}\rangle].
\end{aligned}$$

Comme chacune des expressions entre crochets est positive ou nulle, par définition des fonctions conjuguées, l'égalité qui précède entraîne

$$\begin{aligned}
F_1(\bar{u}) + F_1^*(L^*\bar{p}^*) - \langle L^*\bar{p}^*,\bar{u}\rangle = 0,\\
F_2(L\bar{u}) + F_2^*(-\bar{p}^*) - \langle -\bar{p}^*, L\bar{u}\rangle = 0.
\end{aligned}$$

et, d'après la proposition 3.7, ces conditions signifient :

$$\begin{aligned}
L^*\bar{p}^* \in \partial F_1(\bar{u}),\\
-\bar{p}^* \in \partial F_2(L\bar{u}).
\end{aligned}$$

Et donc, en particulier,

$$\bar{u} = L^*(\bar{p}^*)$$

De plus, le problème primal contient une forme quadratique et le problème dual la somme d'une forme linéaire et d'une forme quadratique, leurs fonctionnelles sont donc strictement convexes et leurs solutions ainsi uniques. □

3.7 Solution directe du problème dual

Dans cette partie, en nous basant sur *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems : A numerical approach* de Roland Glowinski et Jacques-Louis Lions, nous simplifierons le problème dual afin d'obtenir une résolution d'équation, ce qui nous permettra d'appliquer un schéma numérique par la suite.

Définition 3.11. Pour tout $f,\ g \in L^2(\Omega)$ considérons :

$$[f,g] = (\psi_f, \psi_g)_{L^2(\omega_T)} \text{ et } [g] = \|\psi_g\|_{L^2(\omega_T)}$$

Proposition 3.10. *$[f,g]$ est un produit scalaire sur $L^2(\Omega)$, et ainsi $[g]$ une norme sur $L^2(\Omega)$.*

Démonstration. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g,\ g',\ h \in L^2(\Omega)$

- La symétrie est évidente.
- Montrons la bilinéarité :
  On a $\psi_{\lambda g} = \lambda \psi_g$, en effet :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \lambda \psi_g}{\partial t} + \mathcal{A}^* \lambda \psi_g &= 0 \text{ sur } Q_T, \\ \lambda \psi_g &= 0 \text{ sur } \Sigma_T, \\ \lambda \psi_g(x,T) &= \lambda g(x). \end{cases}$$

  et $\psi_{g+h} = \psi_g + \psi_h$, de la même manière.
  Donc

$$\begin{aligned} [g + \lambda g', h] &= (\psi_{g+\lambda g'}, h)_{L^2(\omega_T)} \\ &= (\psi_g + \lambda \psi g', h)_{L^2(\omega_T)} \\ &= [g,h] + \lambda\, [g', h] \end{aligned}$$

- Si $[g,g] = [g] = 0$, alors $\psi_g = 0$, et donc $g = 0$ d'après la preuve de la proposition 3.5.

□

Définition 3.12. On définit l'opérateur linéaire sur $L^2(\Omega)$ par

$$\Lambda g = y_g(T),$$

où y_g est solution de

$$\begin{cases} \partial y_g + \mathcal{A} y_g &= \psi_g \mathbb{1}_{\omega_T} \text{ sur } \Omega_T, \\ y_g(0) &= 0, \\ y_g &= 0 \text{ sur } \Sigma_T \end{cases}$$

et ψ_g solution de

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \psi_g}{\partial t} + \mathcal{A}^* \psi_g &= 0 \ \text{ sur } Q_T, \\ \psi_g &= 0 \ \text{ sur } \Sigma_T, \\ \psi_g(x,T) &= g(x). \end{cases} \tag{3.7.1}$$

Remarque 3.16. Ceci peut se traduire par une résolution que l'on appellera *marche arrière* et une seconde, où l'on imposera la première solution comme contrôle, que l'on appellera *marche avant.*

Théorème 3.7. *La solution du problème de minimisation pénalisé est l'unique solution du problème*

$$\inf_{g \in L^2(\Omega)} \left[\frac{1}{2} (\Lambda g, g)_{L^2(\Omega)} - (g, y_T)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2k} \|g\|^2_{L^2(\Omega)} \right]_{L^2(\Omega)}$$

ce qui se traduit par

$$\begin{cases} \text{Trouver } f \in L^2(\Omega) \text{ tel que} \\ (k^{-1} I + \Lambda) f = y_T \end{cases}$$

Démonstration. La minimisation du problème dual

$$\inf_{g \in L^2(\Omega)} \left(\frac{1}{2} \iint_{\omega_T} \psi_g^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{1}{2k} \|g\|^2_{L^2(\Omega)} - (g, y_T)_{L^2(\Omega)} \right)$$

s'écrit

$$\inf_{g \in L^2(\Omega)} J(g) = \inf_{g \in L^2(\Omega)} \left(\frac{1}{2} a(g,g) - L(g) \right)$$

où

$$a(f,g) = \iint_{\omega_T} \psi_f \psi_g \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{1}{k} (f,g)_{L^2(\Omega)} \text{ et } L(g) = (g, y_T)_{L^2(\Omega)}$$

On remarque que :
– L est linéaire et continue (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

– a est bilinéaire, symétrique, continue, car elle provient d'un produit scalaire, et coercive, en effet :
Soit $g \in L^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} a(g,g) &= \iint_{\omega_T} \psi_g^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{1}{k}(g,g)_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{k}\|g\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème de Lax-Milgram (proposition 1.1), notre problème équivaut à

$$\text{Trouver } f \in L^2(\Omega) \text{ tel que } a(f,g) = L(g)\ \forall g \in L^2(\Omega).$$

Cette égalité variationnelle se lit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } f \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall g \in L^2(\Omega), \\ \displaystyle\iint_{\omega_T} \psi_f \psi_g \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{1}{k}(f,g)_{L^2(\Omega)} = (y_T, g)_{L^2(\Omega)}. \end{array} \right.$$

où ψ_f et ψ_g sont définies comme précédemment.
Ce qui peut être reformulé comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } f \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall g \in L^2(\Omega), \\ [f,g] + \dfrac{1}{k}(f,g)_{L^2(\Omega)} = (y_T, g)_{L^2(\Omega)}. \end{array} \right.$$

Soit y_f la solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t y_f + \mathcal{A} y_f &=& \psi_f \mathbb{1}_{\omega_T} \text{ sur } \Omega_T, \\ y_f(0) &=& 0, \\ y_f &=& 0 \text{ sur } \Sigma_T. \end{array} \right. \tag{3.7.2}$$

En multipliant (3.7.2) par ψ_g et en intégrant sur Ω_T, on obtient :

$$\begin{aligned} \iint_{\omega_T} \psi_f \psi_g \mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \iint_{\Omega_T} \partial_t y_f \psi_g \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{\Omega_T} \mathcal{A} y_f \psi_g \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \iint_{\Omega_T} \partial_t y_f \psi_g \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{\Omega_T} y_f \mathcal{A}^* \psi_g \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \iint_{\Omega_T} \partial_t y_f \psi_g \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{\Omega_T} y_f \partial_t \psi_g \mathrm{d}x\mathrm{d}t \qquad \text{d'après (3.7.1)} \\ &= \iint_{\Omega_T} \partial_t y_f \psi_g \mathrm{d}x\mathrm{d}t + (y_f(T), \psi_g(T)) - (y_f(0), \psi_g(0)) - \iint_{\Omega_T} \partial_t y_f \psi_g \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= (y_f(T), g) \qquad \text{d'après (3.7.1).} \end{aligned}$$

Comme
$$\Lambda f = y_f(T)$$
On obtient
$$\begin{cases} \text{Trouver } f \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall g \in L^2(\Omega), \\ (\Lambda f, g)_{L^2(\Omega)} + \dfrac{1}{k}(f,g)_{L^2(\Omega)} = (y_T, g)_{L^2(\Omega)} \end{cases}$$
On remarque que
$$a(f,g) = (\Lambda f, g)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{k}(f,g)_{L^2(\Omega)} \ \forall f,\ g \in L^2(\Omega)$$
On peut appliquer une fois de plus la proposition 1.1,
et on a bien le problème de minimisation :
$$\inf_{g \in L^2(\Omega)} \left(\frac{1}{2}(\Lambda g, g)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2k}\|g\|^2_{L^2(\Omega)} - (g, y_T)_{L^2(\Omega)} \right)$$
En remarquant que Λ est autoadjoint, en effet :
$$(\Lambda f, g)_{L^2(\Omega)} = \iint_{\omega_T} \psi_f \psi_g \mathrm{d}x\mathrm{d}t = (f, \Lambda g)_{L^2(\Omega)} \ \forall f,\ g \in L^2(\Omega),$$
et si l'on note
$$F(g) = \frac{1}{2}(\Lambda g, g)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2k}\|g\|^2_{L^2(\Omega)} - (g, y_T)_{L^2(\Omega)} \ \forall g \in L^2(\Omega),$$
on a
$$DF(g)h = (\Lambda h, g)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{k}(h,g)_{L^2(\Omega)} - (h, y_T)_{L^2(\Omega)}.$$
Puisque nous avons une unique solution de notre problème de minimisation, il revient à
$$\begin{cases} \text{Trouver } g \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall h \in L^2(\Omega) \\ DF(g)h = (h, \Lambda g + \dfrac{1}{k} g - y_T)_{L^2(\Omega)} = 0 \end{cases}$$
c'est-à-dire
$$\begin{cases} \text{Trouver } f \in L^2(\Omega) \text{ tel que} \\ (k^{-1}I + \Lambda)\, f = y_T \end{cases}$$
□

Remarque 3.17. De la même manière, si $y_0 \neq 0$, nous pouvons montrer que le problème pénalisé est défini par l'équation linéaire suivante

(3.7.3) $$(k^{-1}I + \Lambda) f = y_T - Y_0(T)$$

où Y_0 est défini par

(3.7.4) $$\begin{cases} \dfrac{\partial Y_0}{\partial t} + \mathcal{A} Y_0 &=& 0 \text{ sur } Q_T, \\ Y_0(0) &=& y_0, \\ Y_0 &=& 0 \text{ sur } \Sigma_T. \end{cases}$$

CHAPITRE 4

ALGORITHME NUMÉRIQUE POUR LE CONTRÔLE DES ÉQUATIONS DE DIFFUSION LINÉAIRES

Dans ce chapitre, en nous basant principalement sur les idées de Roland Glowinski et Jacques-Louis Lions, *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems*, nous fabriquerons un schéma qui approxime la solution du problème pénalisé à l'aide d'une discrétisation en temps dite Euler implicite, d'une discrétisation en espace par éléments finis, et d'un algorithme du gradient à pas constant qui permettra de trouver le minimum du problème dual.

Sommaire

4.1 Algorithme à pas constant : Cas général

R. Glowinski et J.L. Lions utilisent dans leur ouvrage l'algorithme du gradient conjugué, qui est un algorithme plus perfectionné. Nous nous limiterons à la technique du gradient à pas constant.
Considérons le problème variationnel

$$\begin{cases} u \in V, \\ a(u,v) = L(v) \ \forall v \in V, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où :

(i) V est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire $(.,.)$ et la norme correspondante $\|.\|$.

(ii) $a : V \times V \to \mathbb{R}$ est bilinéaire, continue, symétrique et V-elliptique.

(iii) $L : V \to \mathbb{R}$ est linéaire et continue.

Remarque 4.1. Il existe un unique opérateur A de $\mathcal{L}(V,V)$ et un unique vecteur $l \in V$ tels que :

$$\begin{cases} a(v,w) = (Av,w) \ \forall v, \ w \in V, \\ L(v) = (l,v) \ \forall v \in V. \end{cases}$$

D'après le théorème de Lax-Milgramm ce problème admet une unique solution et est de plus équivalent au problème de minimisation

$$\inf_{v \in V} J(v)$$

avec

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$$

Le problème (4.1.1) peut être résolu par l'algorithme du gradient à pas constant :

$$u^0 \text{ est donné dans } V$$

Pour $n \geq 0$ fixé, on résout

$$g^n \in V, (g^n, v) = a\left(u^n, v\right) - L\left(v\right) \ \forall v \in V,$$

et on pose

$$u^{n+1} = u^n - \mu g^n$$

où μ est un paramètre positif fixé.

Remarque 4.2. $g^n = \nabla J(u^n)$.

Théorème 4.1. *Si $0 < \mu < 2\alpha/\|A\|$, alors l'algorithme du gradient à pas constant converge au moins de manière géométrique vers la solution u du problème (4.1.1).*

Démonstration. Pour tout $v,\ h \in V$:

$$DJ(v)h = a(v,h) - L(h) = (Av - l, h)$$

Pour tout $v,\ h \in V$, d'une part

$$\begin{aligned} \|\nabla J(v) - \nabla J(w)\| &= \|A(v-w)\| \\ &\leq \|A\| \|v-w\|, \end{aligned}$$

d'autre part, par coercivité de $a(.,.)$,

$$\begin{aligned} (\nabla J(v) - \nabla J(w), v-w) &= (A(v-w), v-w) \\ &= a(v-w, v-w) \\ &\geq \alpha \|v-w\|^2. \end{aligned}$$

Posons $v^n = u^n - u$.
D'où

$$\begin{aligned} \|v^{n+1}\|^2 &= \|v^n - \mu(\nabla J(u^n) - \nabla J(u))\|^2 \\ &= \|v^n\|^2 - 2\mu(\nabla J(u^n) - \nabla J(u), u^n - u) + \mu^2 \|\nabla J(u^n) - \nabla J(u)\|^2 \\ &\leq (1 - 2\alpha\mu + \mu^2 \|A\|^2) \|v^n\|^2. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\|u^n - u\| \leq \gamma^n \|u^0 - u\| \text{ avec } \gamma = \sqrt{1 - 2\alpha\mu + \mu^2 \|A\|^2} < 1$$

□

4.2 Application au problème pénalisé

Rappelons notre problème pénalisé :

$$\inf_{f \in L^2(\Omega)} J(f)$$

avec

$$J(f) = \big((k^{-1}I + \Lambda)f, f\big) - (y_T - Y0(T), f)$$

l'opérateur Λ étant défini par

$$\Lambda f = \varphi(T),$$

où la fonction φ est obtenue à partir de f comme suit.
Résoudre l'équation *en arrière* où l'on prend f comme condition finale

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+\mathcal{A}^*\psi &=& 0 \ \text{ sur } Q_T,\\ \psi &=& 0 \ \text{ sur } \Sigma_T,\\ \psi(x,T) &=& f(x) \end{array}\right. \tag{4.2.1}$$

et ensuite l'équation *en avant* où l'on impose ψ comme contrôle

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathcal{A}\varphi &=& \psi\mathbb{1}_{\omega_T} \text{ sur } \Omega_T,\\ \varphi(0) &=& 0,\\ \varphi &=& 0 \text{ sur } \Sigma_T. \end{array}\right. \tag{4.2.2}$$

Appliquons maintenant l'algorithme du gradient à pas constant au problème pénalisé :

$$f^0 \text{ est donnée dans } L^2(\Omega)$$

Si, pour $n \geqslant 0$, on a f^n :

$$f^{n+1} = f^n - \mu\nabla f^n$$

avec

$$\nabla f^n = (k^{-1}I+\Lambda)f) - (y_T - Y0(T)).$$

Ce qui revient à résoudre premièrement

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial p^n}{\partial t}+\mathcal{A}^*p^n &=& 0 \ \text{ sur } Q_T,\\ p^n &=& 0 \ \text{ sur } \Sigma_T,\\ p^n(x,T) &=& f^n(x), \end{array}\right.$$

et ensuite à résoudre

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial y^n+\mathcal{A}y^n &=& p^n\mathbb{1}_{\omega_T} \text{ sur } \Omega_T,\\ y^n(0) &=& 0,\\ y^n &=& 0 \text{ sur } \Sigma_T. \end{array}\right.$$

On aura donc

$$y^n(T) = \Lambda f^n.$$

On pose

$$g^n = k^{-1}f^n + y^n(T) - y_T,$$

et enfin

$$f^{n+1} = f^n - \mu g^n.$$

4.3 Discrétisation en temps du problème pénalisé

En discrétisant en temps, nous obtiendrons une approximation de l'opérateur Λ, la question sera de savoir si cette approximation est légitime. Supposons donc que T est fini et que l'opérateur $\mathcal{A}$ est indépendant du temps, nous introduisons la discrétisation en temps définie par $\Delta t = T/N$, où N est un entier positif. En utilisant le schéma de discrétisation en temps d'*Euler implicite*, nous approximons (4.2.1) par :

$$\psi^{N+1} = f, \ f \in L^2(\Omega);$$

ensuite en supposant que ψ^{n+1} soit connu, nous résolvons le problème de Dirichlet suivant pour $n = N, N-1, ..., 1$,

$$\text{(4.3.1)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} -\dfrac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} + \mathcal{A}^*\psi^n & = & 0 \text{ sur } Q_T, \\ \psi^n & = & 0 \text{ sur } \Sigma_T. \end{array} \right.$$

Après, en utilisant les mêmes notations , nous approximons (4.2.2) par

$$\varphi^0 = 0,$$

ensuite en supposant que φ^{n-1} soit connu, nous résolvons le problème de Dirichlet suivant pour $n = 1, ..., N$,

$$\text{(4.3.2)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\varphi^n - \varphi^{n-1}}{\Delta t} + \mathcal{A}\varphi^n & = & \psi^n \mathbb{1}_{\omega_T} \text{ sur } \Omega_T, \\ \varphi & = & 0 \text{ sur } \Sigma_T. \end{array} \right.$$

Finalement, nous approximons Λ par $\Lambda^{\Delta t}$ défini par

$$\Lambda^{\Delta t} f = \varphi^N$$

Remarque 4.3. D'après les propriétés d'ellipticité des opérateurs $(\mathcal{A} + \dfrac{1}{\Delta t})$ et $(\mathcal{A}^* + \dfrac{1}{\Delta t})$, les problèmes de Dirichlet (4.3.1) et (4.3.2) admettent une unique solution.

Théorème 4.2. *L'opérateur $\Lambda^{\Delta t}$ est symétrique et défini semi-positivement de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.*

Démonstration. Considérons un couple $\{f, \hat{f}\} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.
Nous avons donc

$$(\Lambda^{\Delta t} f, \hat{f}) = \int_\Omega \varphi^N \hat{\psi}^{N+1} \mathrm{d}x.$$

De plus, comme $\varphi^0 = 0$,

$$\Delta t \sum_{n=1}^{N} \left[\varphi^n \left(\frac{\hat{\psi}^{n+1} - \hat{\psi}^n}{\Delta t} \right) + \hat{\psi}^n \left(\frac{\varphi^n - \varphi^{n-1}}{\Delta t} \right) \right] = \varphi^N \hat{\psi}^{N+1},$$

et en intégrant sur Ω, on obtient à l'aide de (4.3.1) et (4.3.2)

$$\begin{aligned}
(\Lambda^{\Delta t} f, \hat{f}) &= \int_\Omega \varphi^N \hat{\psi}^{N+1} \mathrm{d}x \\
&= \Delta t \sum_{n=1}^{N} \int_\Omega \Big(\varphi^n \mathcal{A}^* \hat{\psi}^n - \hat{\psi}^n \mathcal{A} \varphi^n \Big) \mathrm{d}x + \Delta t \sum_{n=1}^{N} \int_\omega \psi^n \hat{\psi}^n \mathrm{d}x \\
&= \Delta t \sum_{n=1}^{N} \int_\omega \psi^n \hat{\psi}^n \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du théorème. □

Nous aurons besoin également de discrétiser Y_0 de la manière suivante

$$Y_0^0 = y_0,$$

et pour n=1,...,N, en supposant que Y_0^{n-1} est connu nous résolvons le problème elliptique (bien posé)

$$\left\{ \begin{array}{r} \dfrac{Y_0^n - Y_0^{n-1}}{\Delta t} + \mathcal{A} Y_0^n = 0, \\ Y_0^n \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Finalement, nous approximons notre problème pénalisé par

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{\Delta t} \in L^2(\Omega), \\ \Big(k^{-1} f^{\Delta t} + \Lambda^{\Delta t} f^{\Delta t}, \hat{f} \Big) = \Big(y_T - Y_0^N, \hat{f} \Big) \ \forall \hat{f} \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \tag{4.3.3}$$

4.4 Discrétisation en temps et en espace

Nous supposerons à partir de maintenant - et afin de simplifier - que Ω et ω sont des domaines polygonaux de $\mathbb{R}^2$ (pour des domaines non-polygonaux, nous pourrons les approximer par des domaines polygonaux). Nous introduisons donc une première triangulation $\mathcal{T}_h$ de Ω (h : la plus grande longueur des côtés des triangles de $\mathcal{T}_h$) ; nous supposons que $\bar{\Omega}$ et $\bar{\omega}$ sont unions de triangles de $\mathcal{T}_h$. Ensuite nous approximons $H^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ par les espaces de dimension finie (avec $\mathbb{P}_1$ l'espace des polynômes à deux variables de degré $\leqslant$1)

$$V_h = \{ v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}),\ v_{h|T} \in \mathbb{P}_1(T)\ \forall T \in \mathcal{T}_h \}$$

et

$$V_{0h} = \{v_h \in V_h,\ v_h = 0 \text{ sur } \Gamma\} \quad (= V_h \cap H_0^1(\Omega)),$$

respectivement. Nous introduisons maintenant une seconde triangulation en éléments finis $\mathcal{T}_H$ de Ω (nous pouvons prendre $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_H$, mais l'idée de R. Glowinski et J.L. Lions est d'avoir $\mathcal{T}_H$ plus grossier que $\mathcal{T}_h$) et nous associons à$\mathcal{T}_H$ les deux espaces de dimension finie suivants

$$E_H = \{\hat{f}_H | \hat{f}_H \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}),\ \hat{f}_{H|T} \in \mathbb{P}_1(T)\ \forall T \in \mathcal{T}_H\},$$

et

$$E_{0H} = \{\hat{f}_H | \hat{f}_H \in E_H,\ \hat{f}_H = 0 \text{ sur } \Gamma\} \quad (= E_H \cap H_0^1(\Omega)).$$

Puisque la clôture de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est $L^2(\Omega)$, nous pouvons utiliser V_h ou V_{0h} (respectivement E_H ou E_{0H}) pour approximer $L^2(\Omega)$.

A ce stade, il est convenable de réintroduire $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, la forme bilinéaire associée à l'opérateur elliptique $\mathcal{A}$; elle est définie par

$$a(y, z) = \langle \mathcal{A}y, z\rangle\ \forall y,\ z \in H_0^1(\Omega),$$

où $\langle ., .\rangle$ la dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.
Similairement, nous avons

$$a(z, y) = \langle \mathcal{A}^* y, z\rangle\ \forall y,\ z \in H_0^1(\Omega).$$

D'après les propriétés de l'opérateur $\mathcal{A}$, la forme bilinéaire ci-dessus est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$-elliptique.

Nous approximons notre problème pénalisé par

$$\text{(4.4.1)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_{hH}^{\Delta t} \in E_{0H} \\ \displaystyle\int_\Omega \left(k^{-1} f_{hH}^{\Delta t} + \Lambda_{hH}^{\Delta t} f_{hH}^{\Delta t}\right) \hat{f}_H \mathrm{d}x = \int_\Omega \left(y_T - Y_{0h}^N\right) \hat{f}_H \mathrm{d}x\ \forall \hat{f}_H \in E_{0H}, \end{array} \right.$$

où Y_{0h}^N est obtenu grâce à la discrétisation en temps et en espace du problème (3.7.4), à savoir

$$Y_{0h}^0 = y_{0h} \text{ avec } y_{0h} \in V_h \text{ une approximation de } y_0;$$

pour $n = 1, ..., N$, en supposant Y_{0h}^{n-1} soit connu, on calcule Y_{0h}^n commme la solution du problème elliptique suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{0h}^n \in V_{0h}, \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{Y_{0h}^n - Y_{0h}^{n-1}}{\Delta t} v_h \mathrm{d}x + a(Y_{0h}^n, v_h) = 0\ \forall v_h \in V_{0h}. \end{array} \right.$$

L'opérateur $\Lambda_{hH}^{\Delta t}$ est défini par

$$\Lambda_{hH}^{\Delta t} f_H = \varphi_h^N \ \forall f_H \in E_{0H},$$

où pour calculer φ_h^N, nous résolvons sucessivement les problèmes paraboliques discrets suivants :

Premier problème
On pose

$$\psi_h^{N+1} = f_H;$$

et pour $n = N, ..., 1$, nous calculons ψ_h^n à partir de ψ_h^{n+1} en résolvant le problème de Dirichlet discret suivant

$$\begin{cases} \psi_h^n \in V_{0h}, \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{\psi_h^n - \psi_h^{n+1}}{\Delta t} v_h \mathrm{d}x + a(v_h, \psi_h^n) = 0 \ \forall v_h \in V_{0h}. \end{cases} \tag{4.4.2}$$

Deuxième problème
Nou posons

$$\varphi_h^0 = 0;$$

et pour $n = 1, ..., N$, nous calculons φ_h^n à partir de ψ_h^{n-1} en résolvant le problème de Dirichlet discret suivant

$$\begin{cases} \varphi_h^n \in V_{0h}, \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{\varphi_h^n - \varphi_h^{n-1}}{\Delta t} v_h \mathrm{d}x + a(\varphi_h^n, v_h) = 0 \ \forall v_h \in V_{0h}. \end{cases}$$

4.5 Convergence du shéma numérique

Dans cette partie, nous énonçons le théorème de convergence du schéma que nous ne démontrerons malheureusement pas par souci de temps.

Théorème 4.3. *Nous supposons que*

$$\lim_{h \to 0} \|y_{0h} - y_0\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

et

$$\exists \theta_0 > 0, \text{ tel que } \theta \geqslant \theta_0 \ \forall \theta \text{ angle de } \mathcal{T}_h \forall h.$$

Alors

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{\{\Delta ht, h, H\} \to 0} \left\| f_{hH}^{\Delta t} - f \right\|_{L^2(\Omega)} = 0, \\ \displaystyle\lim_{\{\Delta ht, h, H\} \to 0} \left\| \psi_{hH}^{\Delta t} \mathbb{1}_\omega - u \right\|_{L^2(\omega)} = 0, \end{cases}$$

où f, *et* $f_{hH}^{\Delta t}$ *sont respectivement solutions des problèmes (3.7.3) et (4.4.1),* u *est solution de (3.4.1) et* $\psi_{hH}^{\Delta t}\mathbb{1}_\omega$ *le contrôle discret correspondant à* $f_{hH}^{\Delta t}$ *via (4.4.2) avec* $\psi_h^{N+1} = f_{hH}^{\Delta t}$ *dans (4.4.2) .*

Démonstration. Nous renvoyons le lecteur à *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems : A numerical approach* de Roland Glowinski et Jacques-Louis Lions. □

4.6 Simulations

Maintenant que nous avons tous les ingrédients, il suffit de faire tourner l'algorithme.
Soit $T > 0$, considérons le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \nabla & = & v\mathbb{1}_{]1/4,3/4[\times(0,T)}, \text{ sur } Q_T =]0,1[\times(0,T), \\ y & = & 0, \text{ sur } \Sigma_T = \{0,1\} \times (0,T), \\ y(0) & = & \sin(2\pi x). \end{array} \right.$$

Prenons comme fonction cible

$$y_T = \sin(\pi x).$$

Regardons pour différentes valeurs de k (la pénalité) la solution que nous obtenons avec un contrôle minimal en norme L^2 :

Exemple 4.1. Monsieur Dupond possède une maison, qui est à une certaine température le 21 décembre. Supposons que, dans le pays où vit Monsieur Dupond, la température reste à 0°C tout l'hiver. Monsieur Dupond doit recevoir des amis le 21 mars et il souhaiterait que, lorsqu'ils arrivent, il règne une certaine température dans les pièces. Par contre, étant économe, il voudrait également que cela lui coûte le moins cher possible.
Notre étude montre qu'il suffit à monsieur Dupond d'allumer son chauffage seulement quelques jours avant que ses amis n'arrivent.

Regardons maintenant ce qu'il se passe sur un temps plus court :

Lorsque l'on regarde une convergence, il est pertinent d'estimer son ordre :

CONCLUSION

Nous aurons donc démontré la contrôlabilité approchée du problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y = v\mathbb{1}_{\omega\times(0,T)}, & sur\ Q_T = \Omega \times (0,T) \\ y = 0, & sur\ \Sigma_T = \Gamma \times (0,T) \\ y(0) = y_0, & \end{cases}$$

où Ω est un ensemble ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, d $\in \mathbb{N}^*$, ω un sous-ensemble ouvert de Ω, Γ la frontière de Ω, $\mathbb{1}_{\omega\times(0,T)}$ est la fonction caractéristique sur $\omega_T = \omega \times (0,T)$ et $\mathcal{A}$ est un opérateur elliptique du second ordre, et v le contrôle de notre système.

Les solutions y cherchées vivront dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, la dérivée en temps de y sera considérée comme élément de $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, nous prendrons notre contrôle v dans $L^2((0,T)\times\Omega) \equiv L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et enfin l'opérateur différentiel $\mathcal{A}$ ira de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ (dual de $H_0^1(\Omega)$).

De plus, à l'aide de la dualité, nous sommes arrivés à contruire un schéma numérique convergeant vers le contrôle nous permettant d'être à une certaine distance de notre cible et minimisant une certaine norme avec une discrétisation en temps dite *Euler implicite*, une discrétisation en espace par éléments finis, et un algorithme du gradient à pas constant. Malheureusement, le temps a manqué pour étudier la convergence de ce schéma, ce qui pourrait très bien être dans la continuité de ce mémoire. Ensuite, nous pourrions faire le lien entre les théorèmes de points fixes démontrés dans le premier chapitre et la contrôlabilité approchée des équations de diffusions linéaires en étudiant le cas non-linéaire de la manière suivante : on linéarise le système en gelant la partie linéaire (de la façon appropriée), on réinjecte l'ensemble des solutions du problème de contrôle linéarisé et ainsi de suite. Les théorèmes de points fixes permettront d'extraire une solution du problème non-linéaire.

Appendices

ANNEXE A PROGRAMME

Les simulations ont été programmées sous MatLab. Voici en détail l'ensemble des procédures utilisées :

A.1 Calcul de la base des éléments finis

```
function res=base(i, x, N)
Arguments : indice de l'élément de la base, espace, nombre d'éléments de la base
    X = zeros(N,1);
    h = 1/(N + 1); Pas d'espace
    for j=1 :N
        X(j,1) = j*h;
    end;
    if i < N + 1 & 0 < i & 0 <= x & x <= 1
        P = max(0, 1 - abs(x/h - i));
    else
        P = 0;
    end;
    res=P;
end
```

A.2 Calcul de la matrice des intégrales des dérivées des éléments de la base

```
function res=calculK(N)
Arguments : nombre de pas d'espace
    h = 1/(N + 1) ; Pas d'espace
    Matrice = zeros(N, N) ;
    for i=1 :N
        for j=1 :N
            if i == j
                Matrice(i,j) = 2*h^-1 ;
            end ;
            if i == j + 1
                Matrice(i,j) = -h^-1 ;
            end ;
            if j == i + 1
                Matrice(i,j) = -h^-1 ;
            end ;
        end ;
    end ;
    res=Matrice ;
end
```

A.3 Calcul de la matrice des intégrales des éléments de la base

```
function res=calculM(N)
    h = 1/(N + 1) ; Pas d'espace
    Matrice = zeros(N, N) ;
    for i=1 :N
        for j=1 :N
            if i == j
                Matrice(i,j) = (2/3)*h ;
            end ;
            if i == j + 1
                Matrice(i, j) = (1/6)*h ;
            end ;
            if j == i + 1
                Matrice(i,j) = (1/6)*h ;
```

```
            end
        end
    end
    res=Matrice;
end
```

A.4 Calcul de la matrice des intégrales des éléments de la base sur ω

```
function res=calculMomega(N)
    h = 1/(N + 1); Pas d'espace
    Matrice = zeros(N,N);
    for i=1 :N
        for j=1 :N
            if i == j & 1/4*N + 1/4 < i & i < 3/4*N + 3/4
                Matrice(i,j) = 2/3*h;
            end;
            if i == j + 1 & 1/4*N + 1/4 < i & i < 3/4*N + 3/4 & 1/4*N
+ 1/4 < j & j < 3/4*N + 3/4
                Matrice(i,j) = 1/6*h;
            end;
            if j == i + 1 & 1/4*N + 1/4 < i & i < 3/4*N + 3/4 & 1/4*N
+ 1/4 < j & j < 3/4*N + 3/4
                Matrice(i,j) = 1/6*h;
            end;
        end;
    end;
    res=Matrice;
end
```

A.5 Calcul de y_0 dans la base $\mathbb{P}_1$

```
function res = calculy0(N,h)
    y0= zeros(N,1);
    for i=1 :N
        y0(i,1)=sin(2*pi*i*h);
    end;
    res=y0;
end
```

A.6 Calcul de y_T

```
function res = calculyfinal( N,h )
    y= zeros(N,1);
     for i=1 :N
        y(i,1)=sin(pi*i*h);
     end;
    res=y;
end
```

A.7 Calcul de $y_T - Y_0(T)$ dans la base $\mathbb{P}_1$

```
function res = calculYT(m,tho,k,mu,T)
     Nt=T/tho; Nombre de discrétisations dans le temps
     N=2∧m-1; Nombre de discrétisations dans l'espace
     h=1/(2∧m); Pas de discrétisation dans l'espace
     U=zeros(N,Nt);
     M=calculM(N);
     K=calculK(N);
     U( :,1)= calculy0(N,h);
     for t=2 :Nt
        U( :,t)=((M+tho*K)∧(-1))*(M*U( :,t-1));
     end;
     res=calculyfinal(N,h)-U( :,Nt);
end
```

A.8 Calcul de Λ

```
function res = lambda(tho,N,Nt,F,M,K,Momega,inverse)
    psi=zeros(N,Nt);
    phi=zeros(N,Nt);

    Marche arrière
    psi( :,Nt)=F; Initialisation
    for i=1 :Nt-1
        n=Nt-i;
        psi( :,n)=inverse*M*psi( :,n+1);
```

```
    end;

    Marche avant
    phi( :,1)=0; Initialisation
    for n=2 :Nt
        phi( :,n)=inverse*(M*phi( :,n-1)+tho*Momega*psi( :,n));
    end;
    res=phi( :,Nt);
end
```

A.9 Calcul du contrôle

```
function res = controle(m,tho,k,mu,T,constant,M,K,Momega,inverse)
    Nt=T/tho; Nombre de discrétisations dans le temps
    N=2∧m-1; Nombre de discrétisations dans l'espace
    h=1/2∧m; Pas de discrétisation dans l'espace
    F=zeros(N,1); Initialisation
    YT=calculYT(m,tho,k,mu,T); Dicrétisation de y_ T - Y0
    for i=1 :constant
        i (compteur)
        G=k∧(-1)*F+lambda(tho,N,Nt,F,M,K,Momega,inverse)-YT;
        F=F-mu*G;
    end;
    Maintenant que l'on a la solution du problème dual,
    il nous faut la solution du problème primal :

    psi=zeros(N,Nt);
    psi( :,Nt)=F; Initialisation
    for i=1 :Nt-1
        n=Nt-i;
        psi( :,n)=(M+tho*K)∧(-1)*M*psi( :,n+1);
    end;
    res=psi;
end
```

A.10 Calcul de l'expression de la solution dans la base

```
function res = calculYbase(X,Nt,UT,N)
    Y=zeros(length(X),Nt);
    for t=1 :Nt
        for x=1 :length(X)
            for i=1 :N
                Y(x,t) = Y(x,t)+base(i, X(x), N)*UT(i,t);
            end
        end
    end
    res=Y;
end
```

A.11 Calcul de la solution

```
function res=calculY(m,tho,k,mu,T,constant,inverse,M,K,Momega)
    Nt=T/tho; Nombre de discrétisations dans le temps
    N=2 ∧m -1; Nombre de discrétisations dans l'espace
    h=1/(2∧m); Pas de discrétisation dans l'espace
    U=zeros(N,Nt);
    V = controle(m,tho,k,mu,T,constant,M,K,Momega,inverse);
    U( :,1)=calculy0(N,h);
    for t=2 :Nt
        U( :,t)=((M+tho*K)∧(-1))*(M*U( :,t-1)+tho*Momega*V( :,t));
    end;
    res=U;
end
```

A.12 Affichage des courbes

```
function courbe
    constant=1000; Nombre d'incrémentations pour l'algo à pas constant
    mu=5; Pas de l'algorihme à pas constant
    k1=10; Pénalité pour la simulation 1
    k2=100; Pénalité pour la simulation 2
    k3=1000; Pénalité pour la simulation 3
```

k4=10000 ; *Pénalité pour la simulation 4*

ESPACE :
m=7 ;
N = 2∧m - 1 ; *Nombre de dicrétisations en espace*
h = 1/2∧m ; *Pas d'espace*

TEMPS :
T=0.1 ;
tho=0.001 ;
Nt=T/tho ;

PRECISION NUMERIQUE :
X = 0 :0.002 :1 ; *Précision numérique en espace*
Temps = tho :tho :T ; *Précision numérique en temps*

MATRICES NECESSAIRES POUR LES CALCULS
M=calculM(N) ; *Calcul de la matrice des intégrales des éléments de la base*
K=calculK(N) ; *Calcul de la matrice des intégrales des dérivées des éléments de la base*
Momega=calculMomega(N) ; *Calcul de la matrice des intégrales des éléments de la base sur* ω
inverse=(M+tho*K)∧(-1) ;

Calcul de la solution
Y=calculY(m,tho,k1,mu,T,constant,inverse,M,K,Momega) ;
Ecart avec la cible voulu à l'instant T
normeYtmoinsY1=sqrt(h*sum((calculyfinal(N,h)-Y(:,Nt)).∧2)) ;
Calcul de la solution dans la base d'éléments finis
Y1=calculYbase(X,Nt,Y,N) ;

Y=calculY(m,tho,k2,mu,T,constant,inverse,M,K,Momega) ;
normeYtmoinsY2=sqrt(h*sum((calculyfinal(N,h)-Y(:,Nt)).∧2)) ;
Y2=calculYbase(X,Nt,Y,N) ;

Y=calculY(m,tho,k3,mu,T,constant,inverse,M,K,Momega) ;
normeYtmoinsY3=sqrt(h*sum((calculyfinal(N,h)-Y(:,Nt)).∧2)) ;
Y3=calculYbase(X,Nt,Y,N) ;

Y=calculY(m,tho,k4,mu,T,constant,inverse,M,K,Momega) ;

```
normeYtmoinsY4=sqrt(h*sum((calculyfinal( N,h )-Y( :,Nt)).∧2)) ;
Y4=calculYbase(X,Nt,Y,N) ;

subplot(221)
waterfall(Temps,X,Y1)
axis([0 0.1 0 1 -1.5 1.5])
title(['k=10 ||Y_T-Y(T)||=',num2str(normeYtmoinsY1)])
xlabel('temps')
ylabel('espace')
zlabel('solution')
subplot(222)
waterfall(Temps,X,Y2)
axis([0 0.1 0 1 -1.5 1.5])
title(['k=100 ||Y_T-Y(T)||=',num2str(normeYtmoinsY2)])
      xlabel('temps')
ylabel('espace')
zlabel('solution')
subplot(223)
waterfall(Temps,X,Y3)
axis([0 0.1 0 1 -1.5 1.5])
title(['k=1000 ||Y_T-Y(T)||=',num2str(normeYtmoinsY3)])
xlabel('temps')
ylabel('espace')
zlabel('solution')
subplot(224)
waterfall(Temps,X,Y4)
axis([0 0.1 0 1 -1.5 1.5])
title(['k=10000 ||Y_T-Y(T)||=',num2str(normeYtmoinsY4)])
xlabel('temps')
ylabel('espace')
zlabel('solution')
```

A.13 Calcul de l'ordre de convergence

```
function pente
    constant=2000 ; Nombre d'incrémentations pour l'algo à pas constant
    mu=5 ; Pas de l'algorihme à pas constant
    k1=10 ; Pénalité pour la simulation 1
    k2=100 ;Pénalité pour la simulation 2
```

k3=1000 ; *Pénalité pour la simulation 3*
k4=10000 ; *Pénalité pour la simulation 4*

ESPACE :
m=7 ;
N = 2∧m - 1 ; *Nombre de dicrétisations en espace*
h = 1/2∧m ; *Pas d'espace*

TEMPS :
T=0.1 ;
tho=0.001 ;
Nt=T/tho ;

PRECISION NUMERIQUE :
X = 0 :0.002 :1 ; *Précision numérique en espace*
Temps = tho :tho :T ; *Précision numérique en temps*

MATRICES NECESSAIRES POUR LES CALCULS
M=calculM(N) ; *Calcul de la matrice des intégrales des éléments de la base*
K=calculK(N) ; *Calcul de la matrice des intégrales des dérivées des éléments de la base*
Momega=calculMomega(N) ; *Calcul de la matrice des intégrales des éléments de la base sur ω*
inverse=(M+tho*K)∧(-1) ;

Calcul de la solution
Y=calculY(m,tho,k1,mu,T,constant,inverse,M,K,Momega) ;
Ecart avec la cible voulu à l'instant T
normeYtmoinsY1=sqrt(h*sum((calculyfinal(N,h)-Y(:,Nt)).∧2)) ;

Y=calculY(m,tho,k2,mu,T,constant,inverse,M,K,Momega) ;
normeYtmoinsY2=sqrt(h*sum((calculyfinal(N,h)-Y(:,Nt)).∧2)) ;

Y=calculY(m,tho,k3,mu,T,constant,inverse,M,K,Momega) ;
normeYtmoinsY3=sqrt(h*sum((calculyfinal(N,h)-Y(:,Nt)).∧2)) ;

Y=calculY(m,tho,k4,mu,T,constant,inverse,M,K,Momega) ;
normeYtmoinsY4=sqrt(h*sum((calculyfinal(N,h)-Y(:,Nt)).∧2)) ;

k=[log(k1),log(k2),log(k3),log(k4)] ;

```
norme=[log(normeYtmoinsY1),log(normeYtmoinsY2),
log(normeYtmoinsY3),log(normeYtmoinsY4)] ;
pente=mean([(norme(1)-norme(2))/(k(1)-k(2)),
(norme(2)-norme(3))/(k(2)-k(3)),(norme(3)-norme(4))/(k(3)-k(4))]) ;

plot(k,norme,'–rs','LineWidth',4)
title(['Ordre de converge :',num2str(-pente)])
xlabel('log(k)')
ylabel('log(||Y_T-Y(T)||)
```

BIBLIOGRAPHIE

[1] Enrique Fernández-Cara et Arnaud Münch, *Numerical null controllability of semi-linear 1-D heat equations : fixed point, least squares and Newton methods*, 22 mai 2011.

[2] D. R. Smart, *Fixed point theorems*, 1974.

[3] Siger Mizohata, *Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques*, 15 octobre 1958.

[4] I. Ekeland et R. Teman, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, 1974.

[5] Roland Glowinski et Jacques-Louis Lions, *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems : A numerical approach*, 2008 .

[6] Roland Glowinski et Jacques-Louis Lions, *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems*, 1994.

[7] R. Dautray, J.-L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Tome 8 Evolutions : semi-groupe, variationnel*,1988.

[8] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation*,2005

[9] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, 2005.